AK Finanzmathematik (Optimierungsmethoden in der Finanzmathematik)
SS 2012

5. Übungsblatt

30. Zeigen Sie, dass die untenstehende konvexe quadratische Restriktion äquivalent zu eine Menge von Retriktionen ist, die aus (mehreren) linearen Gleichungen und einer SOC-Restriktion besteht:

$$9x_1^2 + 18x_1x_2 + 25x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 + 1 \le 0\,.$$

31. Zeigen Sie, dass die zwei untenstehenden Aussagen (a) und (b) äquivalent sind:

(a)

$$\exists \lambda \ge 0,\ \text{sodass}\ \begin{pmatrix} \gamma(x) - \lambda & b(x)^T \\ b(x) & A(x)^T A(x) - \lambda I \end{pmatrix} \succeq 0$$

(b)

$$\exists \lambda \ge 0,\ \text{sodass}\ \begin{pmatrix} \gamma'(x) - \lambda & b'(x)^T & (A^0x)^T \\ b'(x) & \lambda I & A(x)^T \\ (A^0x)^T & A(x) & I \end{pmatrix} \succeq 0\,,$$

wobei

$$A\colon \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{I\!R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{k}}\ ,\ \mathrm{A(x)} = [\mathrm{A^1x}|\mathrm{A^2x}|\ldots|\mathrm{A^kx}]\,,$$

$$b\colon \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{I\!R}^{\mathrm{k}}\ ,\ \mathrm{b(x)} = [\mathrm{x^Tb^1}, \mathrm{x^Tb^2}, \ldots, \mathrm{x^Tb^k}]^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}[\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^{\mathrm{k}}]^{\mathrm{T}} - \mathrm{A(x)^TA^0x}\,,$$

$$\gamma\colon \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{I\!R}\ ,\ \gamma(\mathrm{x}) = \gamma^0 + 2(\mathrm{b}^0)^{\mathrm{T}}\mathrm{x} - \mathrm{x^T(A^0)^TA^0x}\,,$$

$$b'\colon \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{I\!R}^{\mathrm{k}}\ ,\ \mathrm{b'(x)} = [\mathrm{x^Tb^1}, \mathrm{x^Tb^2}, \ldots, \mathrm{x^Tb^k}]^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}[\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^{\mathrm{k}}]^{\mathrm{T}}\,,\text{und}$$

$$\gamma'\colon \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{I\!R}\ ,\ \gamma'(\mathrm{x}) = \gamma^0 + 2(\mathrm{b}^0)^{\mathrm{T}}\mathrm{x}\,,$$

(vgl. Vorlesung).

32. Zeigen Sie, dass das untenstehende (konvexe) quadratisch restringierte quadratische Optimierungsproblem

$$\begin{array}{cc} \min & f_0(x) \\ \text{udNb.} & f_i(x) \le 0,\ i = 1, 2, \ldots, L \end{array}$$

mit konvexen Funktionen $f_i(x) = (A_ix + b_i)^T(A_ix + b_i) - c_i^T x - d_i$ und $x \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{k}}$ $A_i \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n_i}\times\mathrm{k}}$, $b_i \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n_i}}$, $c_i \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{k}}$, $d_i \in \mathrm{I\!R}$, für $i = 0, 1, , \ldots, L$, als semidefinites Optimierungsproblem formuliert werden kann.

Hinweis: Zeigen Sie, dass jede einzelne Restriktion der Form $f_i(x) \le 0$ als semidefinite Restriktion der Form $Z_i \succeq 0$ mit einer geeigneten Matrix Z_i formuliert werden kann.

33. Sei $A_i = A_i^T \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{p}\times\mathrm{p}}$, $x \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{k}}$ und $A(x) = A_o + x_1A_1 + \cdots + x_kA_k$. Zeigen Sie, dass das Problem der Minimierung des größten Eigenwertes der Matrix $A(x)$ als semidefinites Optimierungsproblem formuliert werden kann.

34. Sei $\hat{\Sigma}$ ein Schätzer der Korrelationsmatrix von vier Assets:

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.5 & 0.2 \\ 0.8 & 1.0 & 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.9 & 1.0 & 0.7 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Ist diese Matrix ein gültige Korrelationsmatrix? Beobachten Sie die hohe Korrelation zwischen Asset 1 und 2 sowie Asset 2 und 3, die eine hohe Korrelation zwischen Asset 1 und 3 implizieren würden! Wie lässt sich $\hat{\Sigma}$ minimal modifizieren, sodass nach der Modifikation eine Korrelationsmatrix entsteht? Formulieren und lösen Sie dieses Problem als semidefinites Optimierungsproblem (vgl. Vorlesung).

35. Betrachten Sie die Fragestellung aus Übungsbeispiel 34 mit der zusätzlichen Restriktion, dass die modifizierte Matrix $\Sigma = (\sigma_{ij})$ auch die Ungleichung $\sigma_{23} = \sigma_{32} \geq 0.85$ erfüllen muss. Modellieren und lösen Sie dieses Problem als semidefinites Optimierungsproblem.

36. Betrachten Sie die drei folgenden ganzzahlingen linearen Probleme.

$$\text{(i)}\quad \begin{array}{ll} \max & 14x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 6x_4 \\ \text{udNb.} & \\ & 28x_1 + 15x_2 + 13x_3 + 12x_4 \leq 39 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{array}{ll} \max & 14x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 6x_4 \\ \text{udNb.} & \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$$\text{(iii)}\quad \begin{array}{ll} \max & 14x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 6x_4 \\ \text{udNb.} & \\ & x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 + x_4 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

(a) Vergleichen Sie die jeweiligen Mengen der zulässigen Lösungen.

(b) Vergleichen Sie die linearen Relaxationen der obigen ILP in denen die Ganzzahligkeitsbedingungen jeweils durch $0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$ ersetzt werden. Klarerweise liefert jede dieser linearen Relaxationen eine obere Schranke für das jeweilige ILP. Welche der Formulierungen (i), (ii), (iii) ist am besten geeignet um eine scharfe obere Schranke durch linare Relaxation zu bekommen?

37. Betrachten Sie das untenstehende ganzzahlige lineare Problem (ILP)

$$\begin{array}{ll} \max & 10x_1 + 13x_2 \\ \text{udNb} & \\ & 10x_1 + 14x_2 \leq 43 \\ & x_1\,, x_2 \geq 0 \\ & x_1\,, x_2 \text{ ganzzahlig} \end{array}$$

(a) Führen Sie die Schlupfvariable x_3 ein und lösen Sie die lineare Relaxation des obigen ILP mit Hilfe der Simplexnethode. Sie sollten die Optimallösung $x_1 = 4.3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ erhalten.

(b) Erzeugen Sie einen Gomory Schnitt, der diese Lösung abschneidet.

(c) Multiplizieren Sie die Restriktion $x_1 + 1.4x_2 + 0.1x_3 = 4.3$ (vgl. optimales Simplextableau) mit der Konstanten $k = 2$ und erzeugen Sie den dazugehörigen Gomory Schnitt. Wiederholen Sie diesen Schritt für $k = 3$, $k = 4$ und $k = 5$. Vergleichen Sie die fünf erzeugten Gomory Schnitte.

(d) Erweitern Sie die LP Relaxation des ursprünglichen Problems um den nach der Multiplikation mit $k = 3$ erzeugten Gomory Schnitt (vgl. Punkt (c)). Lösen Sie das resultierende lineare Problem mit dem Simplexverfahren. Wir lautet die Optimallösung des ILP?