AK Finanzmathematik (Optimierungsmethoden in der Finanzmathematik)
SS 2012

4. Übungsblatt

25. Klassifikationsprobleme in der Finanzmathematik.

    Es wird angenommen, dass unterschiedliche Einheiten nach gewisssen Eigenschaften klassifiziert werden sollen. Denken Sie zB. an Aktien, die nach Preis, Preis/Ertrag Quotient, Wachstum, Wachstumsraten, usw., in Wachstum-Aktien („growth stocks“) und Wert-Aktien („value stocks“) klassifiziert werden sollen. In der Regel erhält man zunächst eine sogenannte *Training Menge* von Einheiten, für die sowohl alle relevanten Merkmale als auch die Klassenzuordnung bekannt sind. Bei der linearen Separationsproblem wird in zwei Klassen klassifiziert und es wird eine Hyperebene gesucht, die die Klassen so separiert, dass $w^t x \leq \gamma - 1$ für alle Einheiten x einer Klasse und $w^t y \geq \gamma + 1$ für alle Einheiten y der anderen Klasse. Hierbei sind x (y) Vektoren, die die Realisierungen der einzelnen maßgeblichen Eigenschaften quantitativ darstellen. Es ist oft erwnscht, dass der Abstand zwischen den zwei separierenden Hyperebenen, der sogenannte *margin*, maximiert wird.

    Nachdem die separierende Hyperebene anhand der Training Menge gefunden wurde, ist die Klassifizierung jeder weiteren Einheit nur anhand des Wertes von $w^t x$ zu treffen, wobei x, wie oben beschrieben, die Realisierungen der einzelnen maßgeblichen Eigenschaften quantitativ darstellt.

    (a) Formulieren Sie das Klassifikationsproblem, d.h. die Bestimmung eines Vektors w^t und eines Skalars γ, so, dass der Abstand zwischen den sparierenden Hyperebenen maximiert wird, als quadratisches Optimierungsproblem.

    (b) Die oben beschriebene Idee der linearen Separation kann auch in dem Fall verwendet werden, wenn die Einheiten aus der Training Menge in keine zwei Klassen linear separiert werden können. In diesem Fall hat das Problem aus (a) keine Lösung. Das Modell kann aber so erweitert werden, dass Verletzungen der Separationsbedingungen erlaubt und zwei Ziele verfolgt werden: die Maximierung des Abstandes zwischen den zwei separierenden Hyperebenen und die Minimierung des Verletzungsgrades bei den Separationsbedingungen. Lässt sich dieses Problem als quadratisches Optimierungsproblem formuliert werden

    (c) Betrachten Sie das Klassifikationsproblem aus (a), wobei der Abstand zwischen den separierenden Hyperebenen nicht anhand der Euklisdischen Norm sondern anhand der ∞-Norm ($||(a_i)||_\infty := \max\{|a_i|\}$) gemessen wird. Lässt sich dieses Separationsproblem als lineares Optimierungsproblem formuliert werden.

26. Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kegel. Beweisen Sie die Aussagen (a) bis (d).

    (a) Der duale Kegel C^* ist konvex und abgeschlossen.

    (b) Wenn das Innere von C nicht leer ist, dann ist C^* pointiert, d.h. C^* enthält keine Geraden. Wenn der Abschluss von C pointiert ist, dann hat C^* ein nicht-leeres Innere.

    (c) C^{**} ist der Abschluss des kleinsten konvexen Kegels, dass C enthält.

    (d) Der Kegel C_s der symmetrischen positiv semidefiniten Matrizen ist selbst-dual.

    (e) Geben Sie das Beispiel eines nicht selbst-dualen Kegels an.

27. Das *standard Kegeloptimierungsproblem 2. Grades (SOCP)* sei folgendermaßen definiert:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{r} \mathbf{c_i}^t \mathbf{x_i} \\ udNB. & \end{array}$$

$$A_1\mathbf{x_1} + \ldots A_r\mathbf{x_r} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x_i} \in C_q^{(n_i-1)}, \text{ für } i = 1, 2, \ldots, r$$

wobei $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ und $\mathbf{c_i} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n_i}}$, $\mathbf{x_i} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n_i}}$, und $A_i \in \mathbb{R}^{\mathrm{m \times n_i}}$ für alle $i = 1, 2, \ldots, r$.
Die Notation $\mathbf{x_i} \in C_q^{(n_i-1)}$ bedeutet, dass $\mathbf{x_i}$ dem Kegel 2. Grades in $\mathbb{R}^{\mathrm{n_i}}$ gehört, d.h. $x_{i1} \geq \sqrt{x_{i2}^2 + \ldots + x_{in_i}^2}$, für alle $i = 1, 2, \ldots, r$, wobei $\mathbf{x_i} = (x_{i1}, \ldots, x_{in_i})^t$ gilt. Diese Restriktionen heißen *Kegel-Restriktionen 2. Grades* und werden als *SOC-Restriktionen* bezeichnet.

Zeigen Sie, dass das lineare Optimierungsproblem ein Spezialfall des SOCP ist. Zeigen Sie weiters, dass jedes SOCP dessen SOC-Restriktionen ausschließlich Kegel in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2$ involvieren, als LP formuliert werden kann.

28. Zeigen Sie, dass die zwei untenstehenden Probleme äquivalent sind:

$$\begin{array}{ll} \min & x^{3/2} \\ udNB. & \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} \min & t \\ udNB. & \\ & x \geq 0 \\ & x^2 \leq tu \\ & u^2 \leq x \\ & t \geq 0 \end{array}$$

Formulieren Sie das zweite Problem als standard SOCP.

29. Seien a_{11}, a_{12}, c_1, c_2, b_1, d_1 und d_2 reelle Zahlen, sodass $d_1 > 0$ und $d_2 > 0$. Formulieren Sie das untenstehende Optimierungsproblem als standard SOCP:

$$\begin{array}{ll} \min & c_1 x_1 + c_2 x_2 + d_1 x_1^{3/2} + d_2 x^{3/2} \\ udNB. & \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \end{array}$$

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis von Beispiel 29.