AK Finanzmathematik (Optimierungsmethoden in der Finanzmathematik)
SS 2012

3. Übungsblatt

20. Wir betrachten ein Portfolio bestehend aus vier Positionen: der S&P 500 Index (S&P500), der 10-Year Treasury Bond Index (10TB), der Nasdaq Composite Index (NC) und eine Cash position (MM). Das Portfoliogewicht von jedem Asset darf 0.4 nicht überschreiten, die Summe der Portfoliogewichte muss 1 betragen und Leerverkäufe sind nicht erlaubt. Die absoluten jährlichen Erträge der vier Positionen sind für den Zeitraum 1960-2003 in der untenstehenden Tabelle angegeben.

Jahr	S&P500	10TB	NC	MM	Jahr	S&P500	10TB	NC	MM
1960	20.2553	262.935	34.461	100.00	1982	115.308	777.332	232.41	440.68
1961	25.6860	268.730	45.373	102.33	1983	141.316	787.357	278.60	482.42
1962	23.4297	284.090	38.556	105.33	1984	150.181	907.712	247.35	522.84
1963	28.7463	289.162	46.439	108.89	1985	197.829	1200.63	324.39	566.08
1964	33.4484	299.894	57.175	113.08	1986	234.755	1469.45	348.81	605.20
1965	37.5813	302.695	66.982	117.97	1987	247.080	1424.91	330.47	646.17
1966	33.7839	318.197	63.934	124.34	1988	288.116	1522.40	381.38	702.77
1967	41.8725	309.103	80.935	129.94	1989	379.409	1804.63	454.82	762.16
1968	46.4795	316.051	101.79	137.77	1990	367.636	1944.25	373.84	817.87
1969	42.5448	298.249	99.389	150.12	1991	479.633	2320.64	586.34	854.10
1970	44.2212	354.671	89.607	157.48	1992	516.178	2490.97	676.95	879.04
1971	50.5451	394.532	114.12	164.00	1993	568.202	2816.40	776.80	905.06
1972	60.1461	403.942	133.73	172.74	1994	575.705	2610.12	751.96	954.39
1973	51.3114	417.252	92.190	189.93	1995	792.042	3287.27	1052.1	1007.84
1974	37.7306	433.927	59.820	206.13	1996	973.897	3291.58	1291.0	1061.15
1975	51.7772	457.885	77.620	216.85	1997	1298.82	3687.33	1570.3	1119.51
1976	64.1559	529.141	97.880	226.93	1998	1670.01	4220.24	2192.7	1171.91
1977	59.5739	531.144	105.05	241.82	1999	2021.40	3903.31	4069.3	1234.02
1978	63.4884	524.435	117.98	266.07	2000	1837.36	4575.33	2470.5	1313.00
1979	75.3032	531.040	151.14	302.74	2001	1618.98	4827.26	1950.4	1336.89
1980	99.7795	517.860	202.34	359.96	2002	1261.18	5558.40	1335.5	1353.47
1981	94.8671	538.769	195.84	404.48	2003	1622.94	5588.19	2003.4	1366.73

(a) Berechnen Sie den minimalen erwarteten Ertrag $\mu_{\min}$ und den maximalen erwarteten Ertrag $\mu_{\max}$ des oben genannten Portfolios. Bestimmen Sie für dieses Portfolio das Efficient Frontier in dem Sie auf das Intervall $[\mu_{\min}, \mu_{\max}]$ ein Gitter mit Schrittgröße 0.5 legen und für jeden Gitterpunkt das Minimum-Varianzproblem bei vordefiniertem zu erreichenden erwarteten Ertrag (siehe Vorlesung) lösen.

(b) Formulieren und lösen Sie das MAD Modell (siehe Vorlesung) für das oben genannte Portfolio und ermitteln Sie das dazugehörige Efficient Frontier ausgehend von einem ähnlichen Gitter wie bei Punkt (a).

(c) Vergleichen die Efficient Frontiers aus Punkt (a) und (b) und die dazugehörigen Portfoliogewichte.

21. Lösen Sie das Sharpe-Ratio Maximierungsproblem für das Portfolio aus Übungsbeispiel 20 unter der Annahme, dass der risikoloser Ertrag 3% beträgt. Seien μ_{SR} und σ_{SR} der erwarteter Ertrag bzw. die Varianz des Portfolios, das den Sharpe-Ratio maximiert. Verifizieren Sie, dass die Kapitalallokationslinie (CAL), die durch den Punkt $(\mu_{\mathrm{SR}}, \sigma_{\mathrm{SR}})$ verläuft, tatsächlich eine Tangente des Efficient Frontier darstellt.

22. (Stochastische Dominanz und untere absolute Abweichung als Risikomaß)
Wir betrachten ein Portfolio bestehend aus n Positionen deren Erträge eine diskrete gemeinsame Verteilung mit Realisierungen $r_{t,i}$, $t = 1, 2, ..., T$, $i = 1, 2, ..., n$, und Wahrscheinlichkeiten p_t, $t = 1, 2, ..., T$ besitzen. Ein Portfolio wird anhand seines Gewichtsvektors $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ spezifiziert. Sei χ die Menge der zulässigen Portfolii. Es wird angenommen das Leerverkäufe nicht erlaubt sind und $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ für alle $x \in \chi$ gilt. Wir bezeichnen mit $\mu(x)$ den Erwartungswert des Ertrags $R(x)$ von Portfolio x: $\mu(x) := E(R(x))$. Als Risikomaß $\rho(x)$ wird die sogenannte untere absolute Abweichung verwendet: $\rho(x) := E(\max\{\mu(x) - R(x), 0\})$. Weiters betrachten wir folgendes parametrisches Portfoliooptimierungsproblem:

$$\max_{x \in \chi} \{\mu(x) - \lambda\rho(x)\} \text{ für } \lambda > 0\,.$$

(a) Lässt sich das oben genannte Portfoliooptimierungsproblem (für ein fixes λ) als lineares Optimierungsprolem formulieren?

(b) Für ein $\eta \in \mathbb{R}$ und ein Portfolio $x \in \chi$ sei $F^{(1)}(x, \eta) := Prob(R(x) \leq \eta)$ und $F^{(2)}(x, \eta) := \int_{\infty}^{\eta} F^{(1)}(x, \xi) d\xi$. Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt fur jedes $\eta \in \mathbb{R}$:

$$F^{(2)}(x, \eta) = E(\max\{\eta - R(x), 0\})\,.$$

(c) Wir sagen Portfolio x dominiert Portfolio y im Sinne der stochastischen Dominanz erster Ordnung (SD1), falls $F^{(1)}(x, \eta) \leq F^{(1)}(y, \eta)$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$ gilt, und die obige Ungleichung für mindestens ein $\eta \in \mathbb{R}$ strickt ist. Wir sagen Portfolio x dominiert Portfolio y im Sinne der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung (SD2), falls $F^{(2)}(x, \eta) \leq F^{(2)}(y, \eta)$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$ gilt, und die obige Ungleichung für mindestens ein $\eta \in \mathbb{R}$ strickt ist. Seien $x, y \in \chi$, sodass y von x im Sinne der SD2 dominiert wird. Zeigen Sie, dass $\mu(x) - \lambda\rho(x) \leq \mu(y) - \lambda\rho(y)$, $\forall \lambda$ mit $0 < \lambda \leq 1$.

23. Bestimmen Sie die optimale Zusammensetzung des Portfolios aus Übungsbeispiel 20 unter Berücksichtigung folgender Erwartungen neben den historischen Daten:

(a) Der erwartete Ertrag des Nasdaq Composite Index (NC) wird um 4% höher als der erwartete Ertrag des S&P 500 Index (S&P500) ausfallen.

(b) Der durchschnittliche erwartete Ertrag von NC und S&P500 wird um 3% höher als der erwartete Ertrag der 10-Year Treasury Bond Index ausfallen.

Diese Erwartungen werden mit großer Zuversicht vertreten; setze $\omega_1 = \omega_2 = 0,0001$ (siehe Vorlesung).

24. Zeigen Sie mit Hilfe der Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen, dass eine optimale Lösung $\bar{\mu}$ des Problems

$$\begin{array}{rc} \min & (\mu - \pi)^T (\tau\Sigma)^{-1} (\mu - \pi) \\ \text{u.d.Nb.} & \\ & P\mu = q \end{array}$$

folgendermaßen gegeben ist:

$$\bar{\mu} = \pi + (\tau\Sigma)P^T [P(\tau\Sigma)P^T]^{-1} (q - P\pi)\,.$$

Für $n, m \in \mathbb{N}$ sind $\tau \in \mathbb{R}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times n}}$, $\pi \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $P \in \mathbb{R}^{\mathrm{m \times n}}$, $q \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ vorgegenene konstante Größen und $\mu \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ ist ein zu bestimmender Vektor (vgl. Vorlesung).