AK Finanzmathematik (Optimierungsmethoden in der Finanzmathematik)
SS 2012

2. Übungsblatt

11. Angenommen ein Investor möchte 20000,- Euro investieren. Er hat folgende Investitionsmöglichkeiten. Erstens kann er in eine Aktie XYZ, die aktuell 20,00 Euro per Stück kostet, investieren. Zweitens kann er in eine Europäische Call Option deren Besitzer 100 Stück der Aktie XYZ um 15,00 Euro per Stück nach genau 6 Monaten von heute kaufen darf, investieren. Diese Option kostet 1000,00 Euro. Der Investor könnte durch den Verkauf der obigen Call Option zusätzliches Kapital auftreiben und dieses sofort investieren. Dabei möchte der Investor nicht mehr als 50 Stück dieser Call Option insgesamt kaufen oder verkaufen. Die letzte Investitionsmöglichkeit ist eine 6-monatige risikolose Null-Coupon-Anleihe, die 90,00 Euro kostet und deren Nominale 100,00 Euro beträgt.

    Es werden drei Szenarien für den Preis der Aktie XYZ in genau 6 Monaten berücksichtigt: der Preis bleibt unverändert, der Preis steigt auf 40,00 Euro, der Preis fällt auf 12,00 Euro. Es wird weiters davon ausgegangen, dass diese 3 Szenarien gleich wahrscheinlich sind.

    (a) Formulieren und lösen sie ein lineares Programm um ein Portfolio zu bestimmen der aus der Aktie XYZ, der oben genannten Call Option sowie der oben genannten Anleihe besteht, und unter allen Portfolii dieser Art den maximalen erwarteten Ertrag aufweist.

    (b) Angenommen der Investor möchte einen Gewinn von mindestens 2000,00 Euro in jedem der drei Szenarien machen. Modifizieren Sie das lineare Programm aus (a) um diesen Wunsch zu berücksichtigen. Vergleichen Sie die Lösung des modifizierten Programms mit der Lösung des Problems aus (a).

    (c) Bestimmen Sie ein Portfolio, das den *risikolosen Ertrag* maximiert. Als *risikoloser Ertrag* wird jener Ertrag bezeichnet, der in jedem der drei Szenarien erreicht wird.

12. **Arbitrage im Devisenmarkt.**
    Betrachten Sie die Wechselkurse zwischen den vier Währungen USD, EUR, JPY und GBP:

	USD	EUR	GBP	JPY
USD	1	0,73791	0,66047	90,68400
EUR	1,35518	1	0,89505	122,87581
GBP	1,51408	1,11725	1	137,30284
JPY	0,01103	0,00814	0,00728	1

    Ein Devisenmarkt heißt *arbitragefrei*, wenn es keine Möglichkleit gibt nur durch Devisenwechsel einen Gewinn zu machen. Geben Sie ein lineares Programm an, durch die Lösung dessen erkannt werden kann, ob das obige Devisenmarkt (bestehend aus den obigen vier Währungen) arbitragefrei ist. Lösen Sie dieses lineare Programm und bestimmen Sie ob die obigen Wechselkurse eine Arbitragemöglichkeit zulassen.

13. Betrachten Sie die quadratische Funktion $f(x) = c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x$ mit $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q^t = Q$. Zeigen Sie die Aussagen in Punkt (a) und (b) und beweisen oder widerlegen Sie die Aussage in Punkt (c):

    (a) Wenn es ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x^t Q x < 0$ existiert, dann ist f nach unten unbeschränkt.

    (b) Angenommen Q ist positiv semidefinit aber nicht positiv definit. Dann entweder ist f nach unten unbeschränkt oder f besitzt unendlich viele Minimalstellen.

    (c) f hat eine eindeutige Minimalstelle dann und nur dann, wenn Q positiv semidefinit ist.

14. Betrachten Sie das folgende quadratische Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1x_2 + x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{udNb.} & \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 - x_2 = 0 \\ & x \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

Ist die Zielfunktion konvex? Zeigen Sie, dass $x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ eine Optimallösung dieses Problems ist, in dem Sie Vektoren y und s finden, die gemeinsam mit x^* die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen erfüllen.

15. Betrachten Sie das quadratische Optimierungsproblem aus Übungsbeispiel 14 und die Approximation $x^{(k)} = \left(\frac{1/3}{,}\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^t$, $y^{(k)} = \left(1, \frac{1}{2}\right)^t$ und $s^{(k)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)^t$ der primal-dualen Lösung in der k-ten Iteration des Newton-Verfahrens (vgl. Vorlesung). Formulieren und lösen Sie die Newtonsche Gleichung für dieses Problem im Punkt $\left(x^{(k)}, y^{(k)}, s^{(k)}\right)$. Geben Sie die größte zulässige Schrittlänge α_k für jene Newtonsche Richtung an, die sich als Lösung der obigen Newtonschen Gleichung ergibt.

16. Betrachten Sie das quadratische Optimierungsproblem aus Übungsbeispiel 14 und $\left(x^{(k)}, y^{(k)}, s^{(k)}\right)$ aus Übungsbeispiel 15. Überzeugen Sie sich, dass $\left(x^{(k)}, y^{(k)}, s^{(k)}\right)$ nicht auf dem zentralen Pfad liegt. Finden Sie einen Vektor $\hat{x}$, sodass $\left(\hat{x}, y^{(k)}, s^{(k)}\right)$ auf dem zentralen Pfad liegt. Welcher Wert von τ entspricht dieser primal-dualen Lösung (vgl. Vorlesung)?

17. Zeigen Sie, dass die untenstehenden in der Vorlesung eingeführten Formulierungen des Markowitz'schen Portfoliooptimierungsproblems äquivalent sind.

$$(a)\ \begin{array}{cc} \max & \mu^T x \\ udNB & \\ & x^T\Sigma x \leq \sigma^2 \\ & x \in \mathcal{X} \end{array} \qquad (b)\ \begin{array}{cc} \max & \mu^T x - \lambda\, x^T \Sigma x \\ udNB & \\ & x \in \mathcal{X} \end{array} \qquad (1)$$

18. Geben Sie die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen für die drei Formulierungen des Markowitz'schen Portfoliooptimierungsproblem an. Zwei dieser Formulierung sind in (1) gegeben und die dritte hier:

$$\begin{array}{cc} \min & x^T\Sigma x \\ udNB & \\ & \mu^T x \geq r \\ & x \in \mathcal{X} \end{array} \qquad (2)$$

Nehmen Sie an, dass die Menge der zulässigen Portfolii $\mathcal{X}$ aus jener Portfolii besteht, die die Bedingungen $Ax = b$ und $Cx \geq d$ mit $A \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{k \times n}}$, $b \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{k}}$, $c \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{p \times n}}$ und $d \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{p}}$ erfüllen. Sei $x^{(\lambda)}$ eine optimale Lösung des Problems (b) in (1) für $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass es für jedes $\lambda > 0$ ein σ^2 und ein r gibt, sodass $x^{(\lambda)}$ eine optimale Lösung vom Problem (a) in (1) bzw. vom Problem (2) ist.

19. Wir betrachten ein Portfolio bestehend aus 5 Aktien deren erwarteten jährlichen Erträge bzw. deren Kovarianzmatrix in der untenstehenden Tabelle angegeben sind. Wir betrachten stets zwei Szenarien: (a) leer Verkäufe sind erlaubt und (b) leer Verkäufe sind nicht erlaubt.

Asset	Kovarianzen ($\times 10^{-2}$)					μ_i (in %)
1	2.30	0.93	0.62	0.74	-0.23	15.1
2		1.40	0.22	0.56	0.26	12.5
3			1.80	0.78	0.27	14.7
4				3.40	-0.56	9.02
5					2.60	17.68

(i) Formulieren Sie ein lineares Programm zur Bestimmung eines Portfolios mit maximalem erwarteten Ertrag. Lösen Sie dieses LP (einfach durch Inspektion) und bestimmen Sie somit den maximalen erwarteten Portfolioertrag $r_{\max}$ für beide Szenarien (a) und (b). Velche Varianz hat das optimale Portfolio?

(ii) Formulieren Sie ein quadratisches Programm zur Bestimmung eines Portfolios mit minimaler Varianz. Lösen Sie dieses QP und bestimmen Sie somit die minimale erwartete Portfoliovarianz für beide Szenarien (a) und (b). Velchen Ertrag $r_{\min}$ hat das optimale Portfolio?

(iii) Für jedes der zwei Szenarien (a) und (b) lösen Sie das Problem (2) (mit einer passenden Menge von zulässigen Portfolii $\mathcal{X}$) für unterschiedliche Werte r zwischen $r_{\min}$ und $r_{\max}$. Skizzieren und vergleichen Sie dann die *efficient frontiers* der beiden Szenarien.