AK Finanzmathematik (Optimierungsmethoden in der Finanzmathematik)
SS 2012

1. Übungsblatt

1. Der Cash-Flow eines Unternehmens sieht für die nächsten acht Quartale folgendermaßen aus:

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
100	500	100	-600	-500	200	600	-900

Die Einnahmen (Ausgaben) sind als negative (positive) Einträge dargestellt. Das Unternehmen hat drei Finanzierungsmöglichkeiten.

- Ein Kredit mit Laufzeit zwei Jahre und 1% Zinsen pro Quartal.
- Zwei andere Kredite mit Laufzeit 6 bzw. 3 Monate und Zinsen von 1.8% bzw. 2.5% pro Quartal. Diese zwei Kredite sind jeweils zum Quartalanfang verfügbar.

Die Rückzahlung der Kredite erfolgt am Ende der jeweiligen Laufzeit, während die Zinsen in jedem Quartal entrichtet werden.

Die Überschüsse können mit einem Zinssatz von 0.5% pro Quartal investiert werden.

Es soll ein Finanzierungsplan ermittelt werden, der das Vermögen des Unternehmens am Anfang des 9. Quartals maximiert. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm (LP) und lösen Sie das LP mit einem Solver Ihrer Wahl.

2. Ein (werdender) Hausbesitzer kann n unterschiedliche Hypothekarkredite zur Finanzierung seines Hauses kombinieren. Seien r_i, $T_i \leq T$, und b_i, der Zinsatz, die Laufzeit, bzw. die maximale Höhe von Kredit i, $1 \leq i \leq n$. Die monatlichen Rückzahlungen von Kredit i müssen im Laufe der Zeit nicht konstant bleiben, es muss jedoch monatlich eine Mindestrückzahlung m_i, $1 \leq i \leq n$, geleistet werden. Weiters müssen die monatlichen Gesamtrückzahlungen im Laufe des gesamten Zeithorizonts konstant bleiben. Sei B der Finanzierungsbedarf und T die Gesamtlänge des zeitlichen Rückzahlungshorizonts (in Monaten). Der Hausbesitzer möchte einen Kreditfinanzierungsplan bestimmen, der seine monatlichen Rückzahlungen (oder - äquivalent - die Gesamtkosten der Kreditfinanzierung) minimiert. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm.

3. Ein kleiner Pensionsfonds hat die untenstehenden Verpflichtungen (in Millionen von Euro) und möchte ein zweckbestimmtes Portfolio (*dedicated portfolio*) aus Anleihen konstruieren

Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4	Jahr 5	Jahr 6	Jahr 7	Jahr 8	Jahr 9
24	26	28	28	26	29	32	33	34

Folgende Anleihen mit Nominalwert von jeweils 100 Euro sind verfügbar:

Anleihe	1	2	3	4	5	6	7	8
Preis	102,44	99,95	100,02	102,66	87,90	85,43	83,42	103,82
Coupon (jährlich)	5,625	4,75	4,25	5,25	4,00	5,00	5,25	5,75
Laufzeit (in Jahren)	1	2	2	3	3	4	5	5

Anleihe	9	10	11	12	13	14	15	16
Preis	110,29	108,85	109,95	107,36	104,62	99,07	103,78	64,66
Coupon	6,875	6,5	6,625	6,125	5,625	4,75	5,5	4,5
Laufzeit	6	6	7	7	8	8	9	9

Formulieren Sie ein lineares Programm (LP), das die Kosten des zweckbestimmten Portfolios minimiert und lösen Sie das LP mit einem Solver ihrer Wahl.

4. Führen Sie unter Verwendung eines Solvers ihrer Wahl eine Sensitivitätsanalyse für das Problem aus Übungsbeispiel 1.

   (a) Angenommen der Cash-Flow in Q2 ist 300 (statt 500). Wie würde dies das Vermögen des Unternehmens am Beginn von Quartal 9 beeinflussen?

   (b) Angenommen der Cash-Flow in Q2 ist 100 (statt 500). Kann die Sensitivitätsanalyse zur Bestimmung des Vermögens am Beginn von Quartal 9 verwendet werden?

   (c) Einer der Lieferanten könnte die Verschiebung einer Zahlung über 50 Euro von Q3 auf Q4 erlauben. Welcher wäre der faire Preis dieses Angebots?

5. Führen Sie unter Verwendung eines Solvers ihrer Wahl eine Sensitivitätsanalyse für das „dedicated portfolio“ in Übungsbeispiel 3.

   (a) Interpretieren Sie die *Oportunitätskosten* in Jahr t ($t = 1, 2, \ldots, 9$).

   (b) Interpretieren Sie die *reduzierten Kosten* von Anleihe i ($i = 1, 2, \ldots, 16$).

   (c) Interpretieren Sie die reduzierten Kosten der (eventuellen) Überschussvariablen z_t, ($t = 0, 1, \ldots, 8$).

6. Berechnen Sie den Preis einer binären Call Option („digital call option“) über ein Underlying XYZ, die 1 Euro zurückzahlt, wenn der Preis von XYZ den Ausübungspreis von 50 Euro überschreitet.

7. Der aktuelle Preis des Underlyings XYZ betrage $S_0 = 40$ Euro. An Ende der nächsten Periode wird der Preis von XYZ entweder $S_0 \cdot u$ oder $S_0 \cdot d$ betragen, wobei $d < 1 < u$ gilt aber d und u unbekannt sind. Der Zinssatz sei 0. Die aktuellen Preise zweier Europäischen Call Optionen mit Ausübungspreisen 50 bzw. 40 Euro über XYZ seien 10 bzw. 13 Euro. Weiters nehmen wir an, dass diese Preise keine Arbitrage zulassen. Bestimmen Sie den fairen Preis einer Europäischen Put Option mit Ausübungspreis 40 Euro über XYZ.

8. Der aktuelle Preis des Underlyings XYZ betrage $S_0 = 40$ Euro. An Ende der nächsten Periode wird der Preis von XYZ entweder $S_0 \cdot u$ oder $S_0 \cdot d$ betragen, wobei $d < 1 < u$ gilt aber d und u unbekannt sind. Der Zinssatz sei 0. Die aktuellen Preise Europäischer Call Optionen mit Ausübungspreisen 30, 40, 50 und 60 Euro über XYZ seien 10, 7, 10/3 bzw. 0 Euro. Welcher dieser Preise wurde falsch berechnet? Begründung?

9. Bestehend aus den Europäischen Call Optionen in Übungsbeispiel 8 konstruieren Sie ein Portfolio, das Typ A Arbitrage erläubt.

10. Betrachten Sie das lineare Modell zur Entdeckung von Arbitrage in den Preisen Europäischer Call Optionen mit gleicher Laufzeit über dasselbe Underlying (vgl. Vorlesung). Dieses Modell wurde unter der Annahme, dass der Call i zum gleichen Preis S_o^i ge- und verkauft wird. In Realität gibt es eine Differenz zwischen dem Kaufpreis eines Assets und dem Preis, der dem Verkäufer vergütet wird. Das ist der sogenannte Geld-Brief-Spanne („bid-ask spread“). Seien S_a^i und S_b^i der Briefkurs bzw. der gebotener Preis von Call i, $S_a^i > S_b^i$, $\forall i$. Formulieren Sie ein analoges Modell zum linearen Modell aus der Vorlesung unter der Annahme, dass alle Calls zu ihrem Briefpreis (gebotenen Preis) gekauft (verkauft) werden. (Ihr neues LP könnte zwei Variablen pro Europäische Call Option beinhalten).