AK Finanzmathematik (Optimierungsmethoden in der Finanzmathematik)
SS 2014
9. Übungsblatt

42. (Stochastische Dominanz und untere absolute Abweichung als Risikomaß)
Wir betrachten ein Portfolio bestehend aus n Positionen deren Erträge eine diskrete gemeinsame Verteilung mit Realisierungen $r_{t,i}$, $t = 1, 2, ..., T$, $i = 1, 2, ..., n$, und Wahrscheinlichkeiten p_t, $t = 1, 2, ..., T$ besitzen. Ein Portfolio wird anhand seines Gewichtsvektors $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ spezifiziert. Sei χ die Menge der zulässigen Portfolii. Es wird angenommen das Leerverkäufe nicht erlaubt sind und $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ für alle $x \in \chi$ gilt. Wir bezeichnen mit $\mu(x)$ den Erwartungswert des Ertrags $R(x)$ von Portfolio x: $\mu(x) := E(R(x))$. Als Risikomaß $\rho(x)$ wird die sogenannte untere absolute Abweichung verwendet: $\rho(x) := E(\max\{\mu(x) - R(x), 0\})$. Weiters betrachten wir folgendes parametrisches Portfoliooptimierungsproblem:

$$\max_{x \in \chi}\{\mu(x) - \lambda\rho(x)\} \text{ für } \lambda > 0\,.$$

(a) Lässt sich das oben genannte Portfoliooptimierungsproblem (für ein fixes λ) als lineares Optimierungsprolem formulieren?

(b) Für ein $\eta \in \mathbb{R}$ und ein Portfolio $x \in \chi$ sei $F^{(1)}(x, \eta) := Prob(R(x) \leq \eta)$ und $F^{(2)}(x, \eta) := \int_{-\infty}^{\eta} F^{(1)}(x, \xi) d\xi$. Zeigen Sie, dass folgende Gleichung für jedes $\eta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F^{(2)}(x, \eta) = E(\max\{\eta - R(x), 0\})\,.$$

(c) Wir sagen Portfolio x dominiert Portfolio y im Sinne der stochastischen Dominanz erster Ordnung (SD1), falls $F^{(1)}(x, \eta) \leq F^{(1)}(y, \eta)$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$ gilt, und die obige Ungleichung für mindestens ein $\eta \in \mathbb{R}$ strickt ist. Wir sagen Portfolio x dominiert Portfolio y im Sinne der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung (SD2), falls $F^{(2)}(x, \eta) \leq F^{(2)}(y, \eta)$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$ gilt, und die obige Ungleichung für mindestens ein $\eta \in \mathbb{R}$ strikt ist. Seien $x, y \in \chi$, sodass y von x im Sinne der SD2 dominiert wird. Zeigen Sie, dass $\mu(x) - \lambda\rho(x) \leq \mu(y) - \lambda\rho(y)$, $\forall \lambda$ mit $0 < \lambda \leq 1$.

43. Klassifikationsprobleme in der Finanzmathematik.

Es wird angenommen, dass unterschiedliche Einheiten nach gewisssen Eigenschaften klassifiziert werden sollen. Denken Sie zB. an Aktien, die nach Preis, Preis/Ertrag Quotient, Wachstum, Wachstumsraten, usw., in Wachstum-Aktien („growth stocks") und Wert-Aktien („value stocks") klassifiziert werden sollen. In der Regel erhält man zunächst eine sogenannte *Training Menge* von Einheiten, für die sowohl alle relevanten Merkmale als auch die Klassenzuordnung bekannt sind. Bei der linearen Separationsproblem wird in zwei Klassen klassifiziert und es wird eine Hyperebene gesucht, die die Klassen so separiert, dass $w^t x \leq \gamma - 1$ für alle Einheiten x einer Klasse und $w^t y \geq \gamma + 1$ für alle Einheiten y der anderen Klasse. Hierbei sind x (y) Vektoren, die die Realisierungen der einzelnen maßgeblichen Eigenschaften quantitativ darstellen. Es ist oft erwünscht, dass der Abstand zwischen den zwei separierenden Hyperebenen, der sogenannte *margin*, maximiert wird.

Nachdem die separierende Hyperebene anhand der Training Menge gefunden wurde, ist die Klassifizierung jeder weiteren Einheit nur anhand des Wertes von $w^t x$ zu treffen, wobei x, wie oben beschrieben, die Realisierungen der einzelnen maßgeblichen Eigenschaften quantitativ darstellt.

(a) Formulieren Sie das Klassifikationsproblem, d.h. die Bestimmung eines Vektors w^t und eines Skalars γ derart, dass der Abstand zwischen den sparierenden Hyperebenen maximiert wird, als quadratisches Optimierungsproblem.

(b) Die oben beschriebene Idee der linearen Separation kann auch in dem Fall verwendet werden, wenn die Einheiten aus der Training Menge in keine zwei Klassen linear separiert werden können. In diesem Fall hat das Problem aus (a) keine Lösung. Das Modell kann aber so erweitert werden, dass Verletzungen der Separationsbedingungen erlaubt und zwei Ziele verfolgt werden: die Maximierung des Abstandes zwischen den zwei separierenden Hyperebenen und die Minimierung des Verletzungsgrades bei den Separationsbedingungen. Lässt sich dieses Problem als quadratisches Optimierungsproblem formulieren?

(c) Betrachten Sie das Klassifikationsproblem aus (a), wobei der Abstand zwischen den separierenden Hyperebenen nicht anhand der Euklisdischen Norm sondern anhand der ∞-Norm ($||(a_i)||_\infty := \max\{|a_i|\}$) gemessen wird. Lässt sich dieses Separationsproblem als lineares Optimierungsproblem formulieren?

44. Wie kann die Restriktion $x^t Q x + 2p^t x + \gamma \leq 0$ als Zugehörigkeit zu einem passend gewählten quadratischen Kegel dargestellt werden, wenn Q positiv semidefinit aber nicht positiv definit ist? (Der positiv-definiter Fall wurde in der Vorlesung besprochen.)