AK Finanzmathematik (Optimierungsmethoden in der Finanzmathematik)
SS 2014
8. Übungsblatt

37. Zeigen Sie, dass die zwei untenstehenden Probleme äquivalent sind:

$$\begin{array}{ll} \min & x^{3/2} \\ udNB. & \\ & x \in P \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & t \\ udNB. & \\ & x \geq 0 \\ & x^2 \leq tu \\ & u^2 \leq x \\ & x \in P \\ & t \geq 0\,, \end{array}$$

wobei $P \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige jedoch feste vorgegebene Menge von reellen Zahlen ist. Formulieren Sie das zweite Problem als standard SOCP.

38. Seien a_{11}, a_{12}, c_1, c_2, b_1, d_1 und d_2 reelle Zahlen, sodass $d_1 > 0$ und $d_2 > 0$. Formulieren Sie das untenstehende Optimierungsproblem als standard SOCP:

$$\begin{array}{ll} \min & c_1x_1 + c_2x_2 + d_1x_1^{3/2} + d_2x^{3/2} \\ udNB. & \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \end{array}$$

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis von Beispiel 37.

39. Zeigen Sie, dass die untenstehende konvexe quadratische Restriktion äquivalent zu eine Menge von Retriktionen ist, die aus (mehreren) linearen Gleichungen und einer SOC-Restriktion besteht:

$$9x_1^2 + 18x_1x_2 + 25x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 + 1 \leq 0\,.$$

40. Sei $\hat{\Sigma}$ ein Schätzer der Korrelationsmatrix von vier Assets (zB. entstanden durch die separate Schätzung der Kovarianzen der Assetpaare):

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.5 & 0.2 \\ 0.8 & 1.0 & 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.9 & 1.0 & 0.7 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Ist diese Matrix positiv-semidefinit (wie eine Korrelationsmatrix sein sollte)? Beobachten Sie die hohen Korrelationswerte zwischen Asset 1 und 2 sowie Asset 2 und 3, die eine hohe Korrelation zwischen Asset 1 und 3 implizieren würden! Modifizieren Sie $\hat{\Sigma}$ so, dass die modifizierte Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ symmetrisch positiv-semidefinit ist und so wenig wie möglich vom ursprünglichen Schätzer $\hat{\Sigma}$ abweicht. Die Abweichung wird anhand der Frobenius-Norm $d_F(\hat{\Sigma}, \Sigma) := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{4}(\sigma_{ij} - \hat{\sigma}_{ij})^2}$ gemessen. Formulieren und lösen Sie dieses Problem als semidefinites Optimierungsproblem.

41. Betrachten Sie die Fragestellung aus Übungsbeispiel 40 mit der zusätzlichen Restriktion, dass die modifizierte Matrix $\Sigma = (\sigma_{ij})$ auch die Ungleichung $\sigma_{23} = \sigma_{32} \geq 0.85$ erfüllen muss. Modellieren und lösen Sie dieses Problem als semidefinites Optimierungsproblem.