AK Finanzmathematik (Optimierungsmethoden in der Finanzmathematik)
SS 2014

5. Übungsblatt

20. Betrachten Sie die quadratische Funktion $f(x) = c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x$ wobei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix ist.

    (i) Zeigen Sie: $x^t Q x < 0$ für ein $x \in \mathbb{R}^n$ impliziert, dass f nach unten unbeschränkt ist.

    (ii) Angenommen Q ist positiv semidefinit aber nicht positiv definit. Zeigen Sie: f ist entweder nach unten unbeschränkt, oder f besitzt unendlich viele globale Minima.

    (iii) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch: „f besitzt ein eindeutiges globales Minimum dann und nur dann, wenn Q positiv definit ist.“?

21. Betrachten Sie folgendes quadratische Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & x_1x_2 + x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_3^2 \\ & +2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{udNb.} & \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 - x_2 = 0 \\ & x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0\,, x_3 \geq 0 \end{array}$$

    Ist die quadratische Zielfunktion konvex? Zeigen Sie, dass $x^* = (1/2; 1/2; 0)$ eine optimale Lösung des obigen Problems ist, in dem Sie y und s bestimmen, die gemeinsam mit x^* die Optimalitätsbedingungen erfüllen.

22. Gilt $(x^k, y^k, s^k) \in \mathcal{F}$ für das Problem aus Beispiel 21 mit $x^k = (1/3; 1/3; 1/3)^t$, $y^k = (-4; 2)^t$, und $s^k = (5; 25/3; 25/3)^t$? Gilt auch $(x^k, y^k, s^k) \in \mathcal{F}^0$? Formulieren und lösen Sie die Newton-Gleichung zur Bestimmung der echten Newton-Richtung am Punkt (x^k, y^k, s^k). Welche ist die größtmögliche Schrittgöße α^k für diese Newton-Richtung?

23. Betrachten Sie das quadratische Optimierungsproblem aus Beispiel 21. Liegt der Punkt (x^k, y^k, s^k) mit $x^k = (1/3; 1/3; 1/3)^t$, $y^k = (-4; 2)^t$, und $s^k = (5; 25/3; 25/3)^t$ auf dem zentralen Pfad $\mathcal{C}$? Gibt es einen Punkt der Form $(\bar{x}(\mu), y^k, \bar{s}(\mu)^k) \in \mathcal{C}$, d.h. gibt es auf dem zentralen Pfad $\mathcal{C}$ einen Punkt, dessen y-Komponente mit y^k übereinstimmt?

24. Berechnen Sie die (zentrierte) Newton-Richtung für das Iterat $x^k = (1/3; 1/3; 1/3)^t$, $y^k = (-4; 2)^t$, und $s^k = (5; 25/3; 25/3)^t$ des Optimierungsproblems aus Beispiel 21 für $\sigma^k = 1$, $\sigma^k = 0,5$ und $\sigma^k = 0$ (vgl. Vorlesung). Für jedes σ^k ermitteln Sie auch die größtmögliche Schrittgröße α^k für die entsprechende Newton-Richtung. Vergleichen Sie mit dem Ergebniss aus Beispiel 21.

25. Zeigen Sie, dass $N_2(\theta_1) \subseteq N_2(\theta_2)$ für $0 < \theta_1 \leq \theta_2 < 1$ und $N_{-\infty}(\gamma_1) \subseteq N_{-\infty}(\gamma_2)$ für $0 < \gamma_2 \leq \gamma_1 < 1$. Zeigen Sie weiters, dass $N_2(\theta) \subseteq N_{-\infty}(\gamma)$ falls $\gamma \leq 1 - \theta$.

26. (i) Überprüfen Sie, dass das Iterat (x^k, y^k, s^k) aus Beispiel 21 in $N_{-\infty}(1/2)$ liegt. Bestimmen Sie den größten Wert von γ, sodass $(x^k, y^k, s^k) \in N_{-\infty}(\gamma)$ gilt.

    (ii) Für jede (zentrierte) Newton-Richtung aus Beispiel 24 bestimen Sie das größtmögliche α^k so, dass für das darauffolgende Iterat $(x^k, y^k, s^k) + \alpha^k(\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta s^k) \in N_{-\infty}(1/2)$ gilt.

27. Sie M die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems, das in jeder Iteration des inneren Punkteverfahrens für quadratische Optimierungsprobleme gelöst wird:

$$M = \begin{pmatrix} -Q & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S^k & 0 & X^k \end{pmatrix} \text{ (vgl. Vorlesung).}$$

Zeigen Sie: M ist regulär falls A einen vollen Zeilenrang hat und Q positiv semidefinit ist. Geben Sie das Beispiel einer singulären Matrix M an, wobei Q nicht positiv semidefinit ist und A vollen Zeilenrang hat.

28. Betrachten Sie folgendes quadratische Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & x^t Q x \\ \text{udNb.} & \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & -x_2 + x_3 + x_4 = 0,1 \\ & x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0\,, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array}$$

mit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ und

$$Q = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,005 & 0 & 0 \\ 0,005 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und das Iterat $x = (1/3; 1/3; 1/3; 0,1)^t$, $y = (0,001; -0,001)^t$, $s = (0,009; 0,008; 2/75; 0,001)^t$. Überprüfen Sie, dass $(x, y, s) \in \mathcal{F}^0$ gilt. Gilt auch $(x, y, s) \in \mathcal{C}$, wobei $\mathcal{C}$ der zentrale Pfad ist? Gelten $(x, y, s) \in N_{-\infty}(0,1)$ bzw. $(x, y, s) \in N_{-\infty}(0,05)$? Bestimmen Sie die zentrierte Newton-Richtung ($\sigma = 1$) und die echte Newton-Richtung ($\sigma = 0$) ausgehend von (x, y, s). Für jede der zwei Richtungen bestimmen Sie die größtmögliche Schrittlänge, sodass das nächste Iterat sich in $N_{-\infty}(0,005)$ befindet.

29. Implementieren Sie das „lomg-step path-following“ Verfahren aus der Vorlesung mit $\sigma_{min} = 0,2$, $\sigma_{max} = 0,8$ und $\gamma = 0,25$ (in einer Programmierumgebung ihrer Wahl). Lösen Sie mit Hilfe Ihres Codes das Problem aus Beispiel 28 ausgehend von dem in diesem Beispiel gegebenen Punkt (x, y, z). Experimentieren Sie mit unterschiedlichen Einstellungen für σ_{min}, σ_{max} und γ.