AK Finanzmathematik (Optimierungsmethoden in der Finanzmathematik)
SS 2014
4. Übungsblatt

17. Betrachten Sie das folgende restringierte Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lllll} \min & f(x,y) & = & -x-y-xy-\frac{1}{2}x^2+y^2 \\ \mathrm{ud}Nb. & x+y^3 & \leq & 3 \\ & x^2-y & = & 3 \\ & x,y & \geq & 0 \end{array}$$

Lösen Sie dieses Problem mit Hilfe des verallgemeinerten reduzierten Gradientenverfahrens (GRG). Geben Sie alle Berechnungschritte, die im Rahmen der ersten Iteration des Verfahrens durchgeführt werden, explizit und konkret an. Die Berechnungen selbst sollen sehr wohl mit Hilfe eines Komputerprogramms durchgeführt werden. Geben Sie nach jeder Iteration den Zielfunktionswert und die aktuelle approximative Lösung an.

18. Das generische quadratische Optimierungsproblem ist definiert als

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^tQx+c^tx \\ \mathrm{ud}Nb. & Ax=b \\ & x\geq 0\,, \end{array}$$

wobei $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$, $c \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ und $Q \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ und $n, m \in \mathbb{N}$ gilt. Die quadratische Matrix Q des Problems sei symmetrisch und positiv definit. Ermitteln Sie die KKT Bedingungen für dieses Problem. Sind die notwendigen Bedingungen (erster bzw. zweiter Ordnung) auch hinreichend für ein (lokales) Minimum in diesem Fall?

19. Betrachten Sie das generisxhe restringierte Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \mathrm{ud}Nb. & \\ & g_i(x)=0 \text{ für } i\in\mathcal{E} \end{array}$$

mit $f, g_i\colon \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{E}$. Sei x^* einen regulärer Punkt für dieses Problem.

(a) Die Gleichung $\nabla\mathcal{L}(x,\lambda)=0$ der Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen soll mit Hilfe des Newton-Verfahrens gelöst werden, wobei $\mathcal{L}(x,\lambda)$ die Lagrange-Funktion und λ die Langrange-Multiplikatoren sind. Wie sieht der Newton-Schritt aus, wenn die Teilmatrix $\nabla^2_{xx}L(x,\lambda)$ der Hesse-Matrix $\nabla^2 L(x,\lambda)$, die nur aus den den x-Variablen entsprechenden Zeilen und Spalten besteht, invertierbar ist?

(b) Betrachten Sie nun das Problem

$$\begin{array}{ll} \min & L(x,\lambda) \\ \mathrm{ud}Nb. & \\ & g_i(x)=0 \text{ für } i\in\mathcal{E}\,. \end{array}$$

Dieses Problem wird iterativ gelöst in dem die approximative Lösung (x^{k+1}, λ^{k+1}) in der $(k+1)$-ten Iteration (kurz die Iterierte (x^{k+1}, λ^{k+1})) als Lösung der lokalen quadratischen Approximation von $L(x,\lambda)$ unten den linear approximierten Nebenbedingungen um (x^k, λ^k)

$$\begin{array}{ll} \min & L(x^k,\lambda^k)+\nabla^t L(x^k,\lambda^k)\begin{pmatrix} x-x^k \\ \lambda-\lambda^k \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-x^k \\ \lambda-\lambda^k \end{pmatrix}^t \nabla^2 L(x^k,\lambda^k)\begin{pmatrix} x-x^k \\ \lambda-\lambda^k \end{pmatrix} \\ \mathrm{ud}Nb. & \\ & g_i(x^k)+\nabla^t g_i(x^k)(x-x^k)=0 \text{ für } i\in\mathcal{E} \end{array}$$

berechnet wird. Stellen Sie die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen für dieses quadratiche Problem auf und vergleichen Sie sie mit den Bedingungen aus (a). Was fällt Ihnen auf?