

**AK Finanzmathematik (Optimierungsmethoden in der Finanzmathematik)**  
**SS 2014**

**2. Übungsblatt**

11. Betrachten Sie  $n$  Europäische Call Optionen (ECO) auf demselben Basiswert  $XYZ$  im Zeithorizont  $[T_0, T_1]$ . Sei  $S_i^0$  der Preis der  $i$ -ten Option,  $1 \leq i \leq n$ , und  $S_0^0$  der Preis des Basiswertes zum Zeitpunkt  $T_0$ . Weiters sei  $K_i$  der Strikepreis der  $i$ -ten Option mit  $0 < K_1 < K_2 \dots < K_n$ . Sei  $S \in (0, \infty)$  der (unbekannte) Preis des Basiswertes zum Zeitpunkt  $T_1$ . Zeigen Sie: In den Preisen  $S_i^0$ ,  $1 \leq i \leq n$ , gibt es keine Arbitragemöglichkeit dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $S_i^0 > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$
- $S_i^0 > S_{i+1}^0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$
- Die stückweise lineare Funktion  $C: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , definiert durch  $C(K_i) = S_i^0$  für  $i = 1, 2, \dots, n$ , ist strikt konvex.

Hinweis: Betrachten Sie ein zum Zeitpunkt  $T_0$  kostenminimales Portfolio bestehend aus den  $n$  Europäischen Call Optionen, das für jeden Preis  $S$  von  $XYZ$  zum Zeitpunkt  $T_1$  einen nichtnegativen Wert hat (vgl. Vorlesung).

12. In Beispiel 11 wird davon ausgegangen, dass jede ECO zum gleichen Preis im Markt ge- und verkauft wird. In der Praxis gibt es aber einen Unterschied zwischen An- und Verkaufspreisen („bid price vs. ask price“). Sei  $S_i^a$ ,  $S_i^b$  der Ankaufs- bzw. Verkaufspreis der  $i$ -ten ECO,  $1 \leq i \leq n$ , zum Zeitpunkt  $T_0$  und es gelte  $S_i^a > S_i^b$ , für alle  $1 \leq i \leq n$ . Formulieren Sie - ähnlich wie im Beispiel 11 - ein lineares Programm zur Entdeckung der Arbitrage in den Preisen  $S_i^a$ ,  $S_i^b$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Lassen sich hieraus hinreichende und notwendige Bedingungen für die Arbitragefreiheit ermitteln?

13. **Arbitrage im Devisenmarkt.**

Betrachten Sie die Wechselkurse zwischen den vier Währungen USD, EUR, JPY und GBP:

|     | USD     | EUR     | GBP     | JPY       |
|-----|---------|---------|---------|-----------|
| USD | 1       | 0,73791 | 0,66047 | 90,68400  |
| EUR | 1,35518 | 1       | 0,89505 | 122,87581 |
| GBP | 1,51408 | 1,11725 | 1       | 137,30284 |
| JPY | 0,01103 | 0,00814 | 0,00728 | 1         |

Ein Devisenmarkt heißt *arbitragefrei*, wenn es keine Möglichkeit gibt nur durch Devisenwechsel einen Gewinn zu machen. Geben Sie ein lineares Programm an, durch die Lösung dessen erkannt werden kann, ob das obige Devisenmarkt (bestehend aus den obigen vier Währungen) arbitragefrei ist. Lösen Sie dieses lineare Programm und bestimmen Sie ob die obigen Wechselkurse eine Arbitragemöglichkeit zulassen.