AK Finanzmathematik (Optimierungsmethoden in der Finanzmathematik)
SS 2014

1. Übungsblatt

1. Der Cash-Flow eines Unternehmens sieht für die nächsten acht Quartale folgendermaßen aus:

Quartal	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
Geldfluss (in Tsd. Euro)	100	500	100	-600	-500	200	600	-900

Die Einnahmen (Ausgaben) sind als negative (positive) Einträge dargestellt. Das Unternehmen hat drei Finanzierungsmöglichkeiten.

- Ein Kredit mit Laufzeit zwei Jahre und 1% Zinsen pro Quartal.
- Zwei andere Kredite mit Laufzeit 6 bzw. 3 Monate und Zinsen von 1.8% bzw. 2.5% pro Quartal. Diese zwei Kredite sind jeweils zum Quartalanfang verfügbar.

Die Rückzahlung der Kredite erfolgt am Ende der jeweiligen Laufzeit, während die Zinsen in jedem Quartal entrichtet werden.

Die Überschüsse können mit einem Zinssatz von 0.5% pro Quartal investiert werden.

Es soll ein Finanzierungsplan ermittelt werden, der das Vermögen des Unternehmens am Anfang des 9. Quartals maximiert. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm (LP) und lösen Sie das LP mit einem Solver Ihrer Wahl.

2. Führen Sie unter Verwendung eines Solvers ihrer Wahl eine Sensitivitätsanalyse für das Problem aus Übungsbeispiel 1.

   (a) Angenommen der Cash-Flow in Q2 ist 300 (statt 500). Wie würde dies das Vermögen des Unternehmens am Beginn von Quartal 9 beeinflussen?

   (b) Angenommen der Cash-Flow in Q2 ist 100 (statt 500). Kann die Sensitivitätsanalyse zur Bestimmung des Vermögens am Beginn von Quartal 9 verwendet werden?

   (c) Einer der Lieferanten könnte die Verschiebung einer Zahlung über 50 Euro von Q3 auf Q4 erlauben. Welcher wäre der faire Preis dieses Angebots?

3. Ein (werdender) Hausbesitzer kann n unterschiedliche Hypothekarkredite mit jeweils fixem Zinsatz zur Finanzierung seines Hauses kombinieren. Sei $[T_0, T]$ der Zeithorizont: $T_0 = 0$ ist der aktuelle Zeitpunkt (an dem der Finanzierungsplan erstellt wird) und T ist der Zeitpunkt an dem die Rückzahlung des Hauses abgeschlossen sein sollte. Seien r_i, $T_i \leq T$, und b_i, der monatlicher Zinsatz, die Laufzeit, bzw. die maximale Höhe von Kredit i, $1 \leq i \leq n$. Die monatlichen Rückzahlungen von Kredit i müssen im Laufe der Zeit nicht konstant bleiben, es muss jedoch monatlich eine Mindestrückzahlung m_i, $1 \leq i \leq n$, geleistet werden. Weiters müssen die monatlichen Gesamtrückzahlungen im Laufe des gesamten Zeithorizonts konstant bleiben. Sei B der Finanzierungsbedarf und T die Gesamtlänge des zeitlichen Rückzahlungshorizonts (in Monaten). Der Hausbesitzer möchte einen Kreditfinanzierungsplan bestimmen, der seine monatlichen Rückzahlungen (oder - äquivalent - die Gesamtkosten der Kreditfinanzierung) minimiert. Es wird angenommen das der Hausbesitzer einen statischen Finanzierungsplan erstellen möchte, d.h. zum Beginn des Zeithorizonts wird entschieden welche Hypothekarkredite in welcher Höhe in Anspruch genommen werden, wobei davon ausgegangen wird, dass alle n möglichen Hypotherkarkredite zum Zeitpunkt T_0 und nur zu diesem Zeitpunkt zur Verfügung stehen. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm.

4. Ein kleiner Pensionsfonds hat die untenstehenden Verpflichtungen (in Millionen von Euro) und möchte ein zweckgebundenes Portfolio (*dedicated portfolio*) aus Anleihen konstruieren

Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4	Jahr 5	Jahr 6	Jahr 7	Jahr 8	Jahr 9
24	26	28	28	26	29	32	33	34

Folgende Anleihen mit Nominalwert von jeweils 100 Euro sind verfügbar:

Anleihe	1	2	3	4	5	6	7	8
Preis	102,44	99,95	100,02	102,66	87,90	85,43	83,42	103,82
Coupon (jährlich)	5,625	4,75	4,25	5,25	4,00	5,00	5,25	5,75
Laufzeit (in Jahren)	1	2	2	3	3	4	5	5

Anleihe	9	10	11	12	13	14	15	16
Preis	110,29	108,85	109,95	107,36	104,62	99,07	103,78	64,66
Coupon	6,875	6,5	6,625	6,125	5,625	4,75	5,5	4,5
Laufzeit	6	6	7	7	8	8	9	9

Formulieren Sie ein lineares Programm (LP), das die Kosten des zweckbestimmten Portfolios minimiert und lösen Sie das LP mit einem Solver ihrer Wahl.

5. Führen Sie unter Verwendung eines Solvers ihrer Wahl eine Sensitivitätsanalyse für das „dedicated portfolio“ in Übungsbeispiel 4 durch. Beantworten Sie folgende Fragen:

   (a) Angenommen die Verpflichtungen im dritten Jahr betragen 29×10^6 Euro. Um wie wieviel erhöhen sich die Kosten des zweckgebundenen Portfolios?

   (b) Die 4. Anleihe ist im optimalen Portfolio nicht vorhanden. Um wie viel sollte der Preis dieser Anleihe fallen, sodass sie im optimalen Portfolio aufgenommen wird?

   (c) Der Manager des Fonds möchte unbedingt 10000 Stück der dritten Anleihe in das zweckgebundene Portfolio aufnehmen. Welche Extrakosten verursacht eine entsprechende Entscheidung des Managements?

   (d) Würden Sie vermuten, dass gewisse Anleihen schlecht bepreist wurden? Welche? Warum?

   (e) Unter welchen Bedingungen bzgl. Zinssatz am Geldmarkt sollte das optimale Portfolio eine Bargeldposition beziehen?

6. Eine Gemeinde berücksichtigt folgende Verpflichtungen in den folgenden 8 Jahren.

Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8
Verplfichtungen	12000	18000	20000	20000	16000	15000	12000	10000

Diese Verpflichtungen möchte sie mit Hilfe eines zweckgebundenen Portfolios über folgende Anleihen mit Nominale jeweils 100 Euro, die zum aktuellen Zeitpunkt ($T_0 = 0$) zur Verfügung stehen, bedienen.

Anleihe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preis	102	99	101	98	98	104	100	101	102	94
Coupon (jährlich)	5	3,5	5	3,5	4	9	6	8	9	7
Laufzeit	1	2	2	3	4	5	5	6	7	8

Bestimmen Sie ein zweckgebundenes Portfolio mit minimalen Kosten, das zum Zeitpunkt T_0 zusammengestellt und in den folgenden 8 Jahren nicht umgeschichtet wird. Führen Sie unter Verwendung eines Solvers ihrer Wahl eine Sensitivitätsanalyse für dieses Problem durch.

   (a) Interpretieren Sie die *Oportunitätskosten* in Jahr t ($t = 1, 2, \dots, 8$).

   (b) Interpretieren Sie die *reduzierten Kosten* von Anleihe i ($i = 1, 2, \dots, 10$).

(c) Interpretieren Sie die reduzierten Kosten der (eventuellen) Überschussvariablen z_t, $(t = 0, 1, \ldots, 7)$.

7. Berechnen Sie den Preis einer binären Call Option („digital call option“) mit Strikepreis 50 Euro und Fällingkeit T über ein Underlying XYZ. Eine solche Call Option zahlt 1 Euro zurück, wenn zum Zeitpunkt T der Preis von XYZ den Ausübungspreis von 50 Euro überschreitet. Wenn der Preis von XYZ zum Zeitpunkt T unter 50 Euro fällt, dann zahlt die binäre Call Option nichts zurčk. Berücksichtigen Sie zwei Szenarien „up “ and „down “ für die Preisentwicklung des Basiswertes.

8. Der aktuelle Preis des Underlyings XYZ betrage $S_0 = 40$ Euro. An Ende der nächsten Periode wird der Preis von XYZ entweder $S_0 \cdot u$ oder $S_0 \cdot d$ betragen, wobei $d < 1 < u$ gilt aber d und u unbekannt sind. Der Zinssatz sei 0. Die aktuellen Preise zweier Europäischen Call Optionen mit Ausübungspreisen 50 bzw. 40 Euro über XYZ seien 10 bzw. 13 Euro. Weiters nehmen wir an, dass diese Preise keine Arbitrage zulassen. Bestimmen Sie den fairen Preis einer Europäischen Put Option mit Ausübungspreis 40 Euro über XYZ.

9. Der aktuelle Preis des Underlyings XYZ betrage $S_0 = 40$ Euro. An Ende der nächsten Periode wird der Preis von XYZ entweder $S_0 \cdot u$ oder $S_0 \cdot d$ betragen, wobei $d < 1 < u$ gilt aber d und u unbekannt sind. Der Zinssatz sei 0. Die aktuellen Preise Europäischer Call Optionen mit Ausübungspreisen 30, 40, 50 und 60 Euro über XYZ seien 10, 7, 10/3 bzw. 0 Euro. Welcher dieser Preise wurde falsch berechnet? Begründung?

10. Bestehend aus den Europäischen Call Optionen in Übungsbeispiel 9 konstruieren Sie ein Portfolio, das Typ A Arbitrage erlaubt.