Theorie des MCLP

Sei $C \in \mathbb{R}^{Q \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$, sodass $Rang(A) = m$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}^n$

Das multikriterielle lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rl} \min & Cx \\ \text{u.d.Nb.} & \\ & Ax = b \\ & x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n \end{array} \qquad \text{(MCLP)}$$

$X := \{x \in \mathbb{R}^n_+ \colon Ax = b\}$ ist die Menge der zulässigen Lösungen des MCLP.

$\forall \lambda \in int(\mathbb{R}^Q_+)$ sei $LP(\lambda)$ folgendes Minimierungsproblem: $\min_{x \in X} \lambda^t Cx$.

Definition 1 *Eine nicht singuläre $m \times m$ Submatrix B von A ist eine* **Basis**.

A wird in Basis und nicht-Basis geteilt $A = (B|N)$, wobei N für nicht-Basis steht.

Jeden $x \in X$ teilt man in den Basis und nicht-Basis Teil: $(x_B|x_N)$.

Auch C wird in Basis und nicht-Basis geteilt : $C = (C_B|C_N)$.

Ein $x_B \in X$, sodass $x_B = B^{-1} * (b - Nx_N)$ heißt (zulässige) **Basis Lösung**.

Wenn x_B eine optimale Basis Lösung eines LPs ist, dann heißt die dazugehörige **Basis** B **optimal**.

Die **Basis** B eines MCLPs heißt **effizient** wenn ein $\exists\lambda \in int(\mathbb{R}^Q_+)$, sodass B eine optimale Basis für $LP(\lambda)$ ist.

Für eine Basis Lösung gilt:

$$(C_B^t | C_N^t)(x_B | x_N) = C_B^t x_B + C_N^t x_N = C_B B^{-1}(b - N x_N) + C_N x_N$$
$$= C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) x_N$$

$\bar{C} = C_N - C_B B^{-1} A = (\bar{C}_B | \bar{C}_N)$ heißt **reduzierte Kostenmatrix**. Sei $R := \bar{C}_N$.

Lemma 1 *Falls $X_{Par} \neq \emptyset$, dann besitzt X einen Pareto optimalen Extrempunkt.*

Lemma 2 *1) Sei B eine effiziente Basis des MCLP und x_B der durch B definierte Extrempunkt von X. Dann gilt $x \in X_{Par}$.*
2) Sei $x \in X_{Par}$ ein Extrempunkt von X. Es existiert eine effiziente Basis B sodass $x = X_B$.

Definition 2 *Zwei Basen $\bar{B}$ und $\hat{B}$ heißen adjazent wenn $\bar{B}$ ($\hat{B}$) aus $\hat{B}$ ($\bar{B}$) durch einen einzigen Pivotschritt erhalten wird.*

Definition 3 *Sei B eine effiziente Basis. x_j heißt effiziente nicht-Basis Variable in B, wenn ein $\exists\lambda \in int(\mathbb{R}^Q_+)$, sodass $\lambda^t R \geq 0$ und $\lambda^t r_j = 0$, wobei r_j die j-te Spalte von R ist.*

Sei B eine effiziente Basis und x_j eine effiziente nicht-Basis Variable in B. Ein zulässiger Pivotschritt mit x_j als werdende Basis Variable heißt effizienter Pivot bzgl. B und x_j.

Lemma 3 *Sei B eine effiziente Basis und x_j eine effiziente nicht-Basis Variable für B. Jeder effiziente Pivotschritt bzgl. B und x_j führt zu einer adjazenten effizienten Basis $\hat{B}$.*

Theorem 1 *(Überprüfung der Effizienz einer nicht-Basis Variable x_j, Evans und Steuer 1973)*
Sei $e = (1, 1, \ldots, 1)^t \in \mathbb{R}^Q$ und I die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^Q$. Sei B eine effiziente Basis und x_j eine nicht-Basis Variable. Alle zulässigen Pivots mit x_j als werdende Basis Variable sind effizient dann und nur dann wenn das untenstehende LP einen optimalen Wert von 0 hat.

$$
\begin{array}{rl}
\max & e^t v \\
u.d.NB. & \\
 & Ry - r_j\delta + Iv = 0 \qquad\qquad \textit{(SP)} \\
 & y \geq 0 \\
 & \delta \geq 0 \\
 & v \geq 0
\end{array}
$$

Falls SP unbeschränkt dann ist x_j eine ineffiziente nicht-Basis Variable. Falls SP beschränkt, dann hat es den Wert 0 und x_j ist eine effiziente nicht-Basis Variable.

Definition 4 *Zwei effiziente Basen $\bar{B}$ und $\hat{B}$ heißen zusammenhängend wenn $\bar{B}$ ($\hat{B}$) aus $\hat{B}$ ($\bar{B}$) durch einer Serie von effizienten Pivotschritten zu erhalten ist.*

Theorem 2 *(Steuer 1985)*
Alle effizienten Basen sind zusammenhängend.

Geometrie des MCLP

Definition 5 *Sei F eine Facette von X. F heißt Pareto Facette wenn $X \subseteq X_{Par}$. F heißt maximale Pareto Facette wenn es keine Pareto Facette F' einer höheren Dimension gibt, sodass $F \subset F'$.*

Lemma 4 *Falls $\exists \lambda \in int(\mathbb{R}^Q_+)$, sodass $\lambda^t Cx = Konstante \, \forall x \in X$, dann gilt $X_{Par} = X$. Sonst gilt $X_{Par} \subset \cup_{t=1}^{T} F_t$ wobei $\{F_t : t = 1, 2, \ldots, T\}$ die Menge aller eigentlichen Facetten von X und T die Anzahl solcher Facetten ist.*

Theorem 3 *Eine Facette $F \subset X$ ist eine Pareto Facette dann und nur dann wenn $\exists x_0 \in X_{Par}$, sodass $x_0 \in relInt(F)$.*

Theorem 4 *X_{Par} ist zusammenhängend und somit ist auch Y_{eff} zusammenhängend.*

Ein multikriterieller Simplex Algorithmus

Es können drei Fälle auftreten:

1. MCLP ist unzulässig, d.h. $X = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \colon AX = b\} = \emptyset$.

2. $X \neq \emptyset$ aber $X_{Par} = \emptyset$.

3. $X_{Par} \neq \emptyset$

Der Algorithmus behandelt die 3 Fälle in 3 Phasen.

Phase I: Bestimme einen ersten Extrempunkt (d.h. eine zulässige Basis) von X oder terminiere mit $X = \emptyset$. Zielfunktion irrelevant in dieser Phase. Phase I des Simplex Algorithmus für herkömmliche LPs kann verwendet werden.

Phase II: Bestimme einen Pareto optimalen Extrempunkt (i.e. eine effiziente Basis) oder terminiere mit $X_{Par} = 0$.

Phase III: Pivotiere entlang effizienten Basen um alle Pareto optimalen Extrempunkte bzw. extremen Strahlen zu bekommen.

Phase II

Annahme: $X \neq \emptyset$. $\exists x^o \in X$, x^o nicht unbedingt Pareto optimal.

Schritt 1: Löse untenstehendes LP um zu bestimmen ob $X_{Par} = \emptyset$.

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & e^t y \\
\text{u.d.Nb.} & \\
 & AX = b \\
 & Cx + Iy = Cx^o \\
 & x, y \geq 0
\end{array}
\qquad \text{(P)}
$$

P unbeschränkt $\Longrightarrow$ $X_{Par} = \emptyset$ (aus Benson, Satz 5.24)

P beschränkt $\Longrightarrow$ P besitzt eine optimale Lösung (x^*, y^*) $\Longrightarrow$ $x^* \in X_{Par}$ (aus Satz 5.23.) I.A. ist x^* kein Extrempunkt des MCLP.

Sei (u^*, w^*) eine optimale Lösung des dualen Problems D von P:

$$
\begin{array}{rl}
\text{min} & u^t b + w^t C x^o \\
\text{u.d.Nb.} & \\
 & u^t A + w^t C \geq 0 \\
 & w \geq 0
\end{array}
\qquad \text{(D)}
$$

mit $u^t b + w^t C x^o = e^t y^*$ (siehe auch Lemma 5.7.1).

u^* ist eine optimale Lösong für P2:

$$\begin{array}{rl} \text{min} & u^t b \\ \text{u.d.Nb.} & \\ & u^t A \geq {w^*}^t C \end{array} \qquad \text{(P2)}$$

Das duale Problem D2 von P2 ist

$$\begin{array}{rl} \text{max} & {w^*}^t C x \\ \text{u.d.Nb.} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

und besitzt eine optimale Lösung, die ein Pareto optimaler Extrempunkt für MCLP ist (aus Isermann, Satz 5.7.3).

Notation für den mutikriteriellen Simplex Algorithmus:

LB - Liste von zu behandelnden Basen
LPX - Liste von Pareto optimalen Extrempunkten
LPU - Liste von Pareto optimalen extremen Strahlen

Ein extremer Strahl des Polyeders X wird durch den Extrempunkt x_B wovon der Strahl ausgeht und die Richtung r^j charakterisiert.

Ein multikriterieller Simplex Algorithmus

Initialisierung: LB:= $\emptyset$;LPX:= $\emptyset$; LPU:= $\emptyset$

Schritt 1a: Löse das LP min$\{e^t\widehat{x}\colon Ax + I\widehat{x} = b, x \geq 0, \widehat{x} \geq 0\}$.

Schritt 1b: Wenn dass LP aus Schritt 1a unbeschränkt oder sein optimaler Wert ungleich 0 ist, dann STOP. $X = \emptyset$. Sonst gehe zu Schritt 2 mit einer zulässigen Lösung x^o des obigen LPs.

Schritt 2a: Löse das LP min$\{u^t b + w^t C x^o\colon u^t A + w^t C \geq 0, w \geq 0\}$.

Schritt 2b: Wenn das LP aus Schritt 2a unbeschränkt ist, dann STOP: $X_{Par} = \emptyset$. Sonst sei (u^*, w^*) eine optimale Lösung des obigen LPs. Gehe zu Schritt 2c.

Schritt 2c: Löse das LP min$\{w^{*t} C x\colon Ax = b, x \geq 0\}$. Füge die gefundene optimale Basis und den dazugehörigen optimalen Extrempunkt bzw. extremen Strahl der Liste LB bzw. LPX bzw. LPU hinzu. Gehe zu Schritt 3.

Schritt 3a: Falls $LB = \emptyset$, dann STOP: Alle Pareto optimalen Extrempunkte und alle Pareto optimalen extremen Strahlen wurden gefunden. Sonst wähle ein Basis B aus LB, entferne B aus LB, und gehe zu Schritt 3b.

Schritt 3b: Für alle Variablen x_j, die nicht-Basis Variablen für die Basis B sind, löse folgendes LP

$$\max\{e^t v \colon Ry - r^j\delta + Iv = 0; y, \delta, v \geq 0\}$$

Wenn dieses LP eine optimale Lösung besitzt dann führe folgende Schritte durch.
Für alle zulässigen Pivots mit werdende Basis Variable x_j

- pivotiere
- Falls die resultierende adjazente, effiziente Basis neu ist, dann füge diese in LB hinzu.
- Falls der dazugehörige Extrempunkt neu ist, dann füge diesen in LPX hinzu
- Falls die Pivotspalte ausschließlich negative Einträge beinhaltet, dann füge den dazugehörigen von x_B ausgehenden Pareto optimalen extremen Strahl in LPU hinzu

Gehe zu Schritt 3a.