Theorem 5 *(Eigenschaften der elliptischen Verteilung)*

Sei $X \sim E_k(\mu, \Sigma, \psi)$. X *hat folgende Eigenschaften:*

Lineare Kombinationen:

Für $B \in \mathbb{R}^{k\times d}$ *und* $b \in \mathbb{R}^k$. *Es gilt dann*

$$BX + b \in E_k(B\mu + b, B\Sigma B^T, \psi).$$

Randverteilungen:

Setze $X^T = \left(X^{(1)^T}, X^{(2)^T}\right)$ *für*
$X^{(1)^T} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ *und* $X^{(2)^T} = (X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_k)^T$ *und analog*
$\mu^T = \left(\mu^{(1)^T}, \mu^{(2)^T}\right)$ *sowie* $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^{(1,1)} & \Sigma^{(1,2)} \\ \Sigma^{(2,1)} & \Sigma^{(2,2)} \end{pmatrix}$. *Es gilt dann*
$X_1 \sim N_n\left(\mu^{(1)}, \Sigma^{(1,1)}, \psi\right)$ *und* $X_2 \sim N_{k-n}\left(\mu^{(2)}, \Sigma^{(2,2)}, \psi\right)$.

Bedingte Verteilungen:

Wenn Σ regulär, dann ist auch die bedingte Verteilung $X^{(2)}\Big|X^{(1)} = x^{(1)}$ elliptisch:

$$X^{(2)}\Big|X^{(1)} = x^{(1)} \sim N_{k-n}\Big(\mu^{(2,1)}, \Sigma^{(2,2,1)}, \tilde{\psi}\Big)$$

wobei

$$\mu^{(2,1)} = \mu^{(2)} + \Sigma^{(2,1)}\Big(\Sigma^{(1,1)}\Big)^{-1}\Big(x^{(1)} - \mu^{(1)}\Big)$$

und

$$\Sigma^{(2,2,1)} = \Sigma^{(2,2)} - \Sigma^{(2,1)}\Big(\Sigma^{(1,1)}\Big)^{-1}\Sigma^{(1,2)}.$$

Typischerwise sind $\tilde{\psi}$ und ψ unterschiedlich
(siehe Fang, Katz und Ng 1987).

Quadratische Formen:

Wenn Σ regulär, dann gilt

$$D^2 = (X-\mu)^T \Sigma^{-1} (X-\mu) \sim R^2.$$

wobei R die nichtnegative ZV aus der stochastischen Darstellung $Y = RS$ der spherischen Verteilung Y mit $S \sim U\left(\mathcal{S}^{(d-1)}\right)$ und $X = \mu + AY$. Die Zufallsvariable D heißt *Mahalanobis Distanz*.

Faltung:

Seien $X \sim E_k(\mu, \Sigma, \psi)$ und $Y \sim E_k(\tilde{\mu}, \Sigma, \tilde{\psi})$ zwei unabhängige Zufallsvektoren. Es gilt dann $X + Y \sim E_k(\mu + \tilde{\mu}, \Sigma, \bar{\psi})$ wobei $\bar{\psi} = \psi\tilde{\psi}$.

Achtung: Σ muss i.a. dieselbe für X und Y sein.

Anmerkung: Aus $X \sim E_k(\mu, I_k, \psi)$ folgt nicht, dass die Komponenten von X unabhängig sind. Die Komponenten von X sind dann und nur dann unabhängig wenn X multivariat normalverteilt mit der Einheitsmatrix als Kovarianzmatrix ist.

Elliptische Verteilungen und Portfoliooptimierung

Betrachte d Aktien und die Klasse $\mathcal{P}$ aller Portfolios bestehend aus diesen Aktien.

Jedes Portfolio aus $\mathcal{P}$ ist eindeutig durch den Gewichtsvektor $w = (w_i) \in \mathbb{R}^d$ definiert. Daher:

$$\mathcal{P} = \left\{ w = (w_i) \in \mathbb{R}^d \colon \sum_{i=1}^{d} |w_i| = 1 \right\}$$

Sei $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ ein Zufallsvektor, der die Rendite der d Aktien darstellt.

Die Portfoliorendite ist als $Z(w) = \sum_{i=1}^{d} w_i X_i$ gegeben.

Die erwartete Portfoliorendite: $E(Z(w)) = w^T \mu$.

Es gelte $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ mit $E(X_k^2) < \infty$ und $\Sigma = cov(X)$.

Sei $\mathcal{E}_m$ die Klasse jener PF aus $\mathcal{P}$ sodass $E(Z(w)) = m$, $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

$$\mathcal{E}_m = \{ w = (w_i) \in \mathbb{R}^d, \sum_{i=1}^{d} |w_i| = 1, w^T \mu = m \}$$

Das Mean-Variance Portfoliooptimierungsmodell:

$$\min_{w \in \mathcal{E}_m} var(Z(w))$$

Sei ρ ein Risikomaß, $\rho\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, das folgende Eigenschaften besitzt:

(1) $\rho(X + r) = \rho(X) + r$ (Invarianz bzgl. Translation)

(2) $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ für $\lambda \geq 0$ (Positive Homogenität)

Beispiel: VaR und $CVaR$ besitzen die obigen Eigenschaften.

Theorem 6 *(Embrechts et al., 2002)*
Seien $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d) = \mu + AY$ elliptisch verteilt mit $\mu \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{d\times k}$ und $Y \sim S_k(\psi)$ ein spherisch verteilter Zufallsvektor.
Sei $E(X_k^2) < \infty$, $\forall k$. Es gilt:

$$\mathit{arg}\min\{\rho(Z(w))\colon w \in \mathcal{E}_m\} = \mathit{arg}\min\{var(Z(w))\colon w \in \mathcal{E}_m\}$$

für jedes Risikomaß ρ, das die obigen Eigenschaften (1) und (2) besitzt, und $\rho(Y_1) \geq 0$ erfüllt, wobei Y_1 die erste Komponente der spherisch verteilten Vektors Y ist.

Im Falle von elliptischen Verteilungen gilt:

ρ besitzt die Eigenschaften (1) und (2) und genügt $\rho(Y_1) \geq 0$
$\Longrightarrow$ ρ ist subadditiv.