

# Multivariate Verteilungen

## Zufallsvektoren und Modellierung der Abhängigkeiten

Ziel: Modellierung der Veränderungen der Risikofaktoren

$$X_n = (X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,d})$$

Annahme:  $X_{n,i}$  und  $X_{n,j}$  sind abhängig aber  $X_{n,i}$  und  $X_{n\pm k,j}$  sind unabhängig für  $k \in \mathbb{N}$  ( $k \neq 0$ ),  $1 \leq i, j \leq d$ .

## Grundlegende Eigenschaften von Zufallsvektoren

Ein  $d$ -dimensionaler Zufallsvektor  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T$  wird durch seine gemeinsame Verteilungsfunktion  $F$  spezifiziert

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_d) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_d \leq x_d) = P(X \leq x).$$

Die  $i$ . Randverteilung  $F_i$  von  $F$  ist die Verteilungsfunktion von  $X_i$  und ist folgendermaßen gegeben:

$$F_i(x_i) = P(X_i \leq x_i) = F(\infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty)$$

Die Verteilungsfunktion  $F$  ist stetig wenn es eine nicht negative Funktion  $f \geq 0$  gibt, sodass

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_d} f(u_1, u_2, \dots, u_d) du_1 du_2 \dots du_d$$

$f$  ist in diesem Fall die Dichte von  $F$ .

Die Komponenten von  $X$  sind unabhängig dann und nur dann wenn

$$F(x) = \prod_{i=1}^d F_i(x_i) \text{ oder, wenn } f \text{ existiert } f(x) = \prod_{i=1}^d f_i(x_i)$$

Ein Zufallsvektor ist eindeutig durch seine charakteristische Funktion  $\phi_X(t)$  spezifiziert:

$$\phi_X(t) = E(\exp\{it^T X\}), t \in \mathbb{R}^d$$

**Beispiel 1** Für die multivariate Normalverteilung mit Mittelwert  $\mu$  und Kovarianzmatrix  $\Sigma$  ist die Dichtefunktion  $f$  bzw. die charakteristische Funktion  $\phi_X$  folgendermaßen gegeben ( $|\Sigma| = |\text{Det}(\Sigma)|$ ):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \right\}, x \in \mathbb{R}^d$$

$$\phi_X(t) = \exp \left\{ it^T \mu - \frac{1}{2} t^T \Sigma t \right\}, t \in \mathbb{R}^d$$

Wenn  $E(X_k^2) < \infty$  für alle  $k$ , dann ist die Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors folgendermaßen gegeben:

$$\text{Cov}(X) = E((X - E(X))(X - E(X))^T)$$

**Übung 1** Zeigen Sie das folgende Gleichungen gelten:

$$E(BX + b) = BE(X) + b \quad \text{Cov}(BX + b) = BCov(X)B^T$$

### **Beispiel 2** (*Portfolio Optimierung, Markowitzs Modell*)

Es wird in  $d$  (risikoreiche) Assets investiert. Der erwartete Portfolioertrag muss  $\mu_p$  betragen. Sei  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T$  der Zufallsvektor der Asset>Returns mit  $E(X) = \mu$  und  $Cov(X) = \Sigma$ . Die Gewichte des Minimum-Varianz Portfolios sind als Lösung des folgenden quadratischen Optimierungsproblems gegeben:

$$\begin{aligned} \min_w \quad & w^T \Sigma w \\ \text{sodass} \quad & \\ & w^T \mu = \mu_p \\ & \sum_{i=1}^d |w_i| = 1 \end{aligned}$$

(siehe zB. Campbell et al. (1997))

### **Abhängigkeitsstrukturen**

Probleme der Modellierung der Abhängigkeitsstrukturen zwischen Finanzgrößen mit Hilfe der (multivariaten) Normalverteilung.

- Finanzgrößen haben i.a. heavier Tails als die Normalverteilung
- Die Zusammenhänge bei größeren Verlusten sind i.a. stärker als bei "normalen" Werten. Diese Art von Zusammenhängen kann mit der multivariaten Normalverteilung nicht modelliert werden.

## Abhängigkeitsmaße

Seien  $X_1$  und  $X_2$  zwei Zufallsvariablen. Es gibt einige skalare Maße für die Abhängigkeit zwischen  $X_1$  und  $X_2$ .

## Lineare Korrelation

Annahme:  $\text{var}(X_1), \text{var}(X_2) \in (0, \infty)$ . Der Koeffizient der linearen Korrelation  $\rho_L(X_1, X_2)$  ist folgendermaßen gegeben:

$$\rho_L(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{var}(X_1)\text{var}(X_2)}}$$

$$X_1 \text{ und } X_2 \text{ sind unabhängig} \Rightarrow \rho_L(X_1, X_2) = 0$$

$\rho_L(X_1, X_2) = 0$  impliziert nicht, dass  $X_1$  und  $X_2$  unabhängig sind

**Beispiel 3** Sei  $X_1 \sim N(0, 1)$  und  $X_2 = X_1^2$ . Es gilt  $\rho_L(X_1, X_2) = 0$  aber  $X_1$  und  $X_2$  sind klarerweise abhängig.

Weiters gilt:

$$|\rho_L(X_1, X_2)| = 1 \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0, \text{ sodass } X_2 = \alpha + \beta X_1$$

$$\text{und } \text{signum}(\beta) = \text{signum}(\rho_L(X_1, X_2))$$

Der lineare Korrelationskoeff. ist eine Invariante unter streng monoton steigende lineare Transformationen, ist jedoch keine Invariante unter streng monoton steigende nichtlineare Transformationen.

**Übung 2** Seien  $X_1$  und  $X_2$  zwei Zufallsvariablen. Seien  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\beta_1 > 0$  und  $\beta_2 > 0$ . Zeigen Sie, dass  $\rho_L(\alpha_1 + \beta_1 X_1, \alpha_2 + \beta_2 X_2) = \rho_L(X_1, X_2)$ .

### Rang Korrelation

Die Koeffizienten der Rang Korrelation (Spearman's rho und Kendalls tau) sind Maße für die Übereinstimmung von bivariaten Zufallsvektoren.

Seien  $(x_1, x_2)$  und  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  zwei Punkte in  $\mathbb{R}^2$ . Die zwei Punkte heißen *übereinstimmend* wenn  $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) > 0$  und *nicht übereinstimmend* wenn  $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) < 0$ .

Seien  $(X_1, X_2)$  und  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$  zwei unabhängige Zufallsvektoren mit gemeinsamer bivariate Verteilung.

Die Kendall's Tau  $\rho_\tau$  ist definiert als

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = P((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0) - P((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) < 0)$$

Sei  $(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$  ein dritter von  $(X_1, X_2)$  und  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$  unabhängiger Zufallsvektor mit derselben Verteilung wie  $(X_1, X_2)$  und  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ .

Die Spearman's Rho  $\rho_S$  ist definiert als

$$\rho_S(X_1, X_2) = P((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \hat{X}_2) > 0) - P((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \hat{X}_2) < 0)$$

Einige Eigenschaften von  $\rho_\tau$  und  $\rho_S$ :

- $\rho_\tau(X_1, X_2) \in [-1, 1]$  und  $\rho_S(X_1, X_2) \in [-1, 1]$ .
- Wenn  $X_1$  und  $X_2$  unabhängig, dann  $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = 0$ .  
Die Umkehrung gilt i.a. nicht.
- Sei  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine streng monoton steigende Funktion.  
Dann gilt:

$$\rho_\tau(T(X_1), T(X_2)) = \rho_\tau(X_1, X_2)$$

$$\rho_S(T(X_1), T(X_2)) = \rho_S(X_1, X_2)$$

## Tail-Abhängigkeit

**Definition 1** Sei  $(X_1, X_2)^T$  ein Zufallsvektor mit Randverteilungen  $F_1$  und  $F_2$ . Der Koeffizient der oberen Tail-Abhängigkeit von  $(X_1, X_2)^T$  wird folgendermaßen definiert:

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{u \rightarrow 1^-} P(X_2 > F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 > F_1^{\leftarrow}(u))$$

vorausgesetzt der Limes existiert.

Der Koeffizient der unteren Tail-Abhängigkeit von  $(X_1, X_2)^T$  wird folgendermaßen definiert:

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{u \rightarrow 0^+} P(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u))$$

vorausgesetzt der Limes existiert.

Wenn  $\lambda_U > 0$  ( $\lambda_L > 0$ ) heißt es,  $(X_1, X_2)^T$  hat eine obere (untere) Tail-Abhängigkeit.

(Siehe Joe 1997, Schmidt und Stadtmüller 2002)

**Übung 3** Sei  $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$  und  $X_2 = X_1^2$ . Bestimmen Sie  $\lambda_U(X_1, X_2)$ ,  $\lambda_L(X_1, X_2)$  und zeigen Sie, dass  $(X_1, X_2)^T$  eine obere und eine untere Tail-Abhängigkeit hat. Berechnen Sie auch den linearen Korrelationskoeffizienten  $\rho_L(X_1, X_2)$ .

## Die multivariate Normalverteilung

**Definition 2** Der Zufallsvektor  $(X_1, X_2, \dots, X_d)^T$  hat eine multivariate Normalverteilung (oder eine multivariate Gauss'sche Verteilung) wenn  $X \stackrel{d}{=} \mu + AZ$ , wobei  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k)^T$  ein Vektor von i.i.d. normalverteilten ZV ( $Z_i \sim N(0, 1)$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, k$ ),  $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$  ist eine konstante Matrix und  $\mu \in \mathbb{R}^d$  ist ein konstanter Vektor.

Für so einen Zufallsvektor  $X$  gilt:  $E(X) = \mu$ ,  $cov(X) = \Sigma = AA^T$  ( $\Sigma$  positiv semidefinit). Notation:  $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$ .

**Theorem 1** (Multivariate Normalverteilung: äquiv. Definitionen)

1.  $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$  für einen Vektor  $\mu \in \mathbb{R}^d$  und eine positiv semidefinite Matrix  $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ , dann und nur dann wenn  $\forall a \in \mathbb{R}^d$ ,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_d)^T$ , die Zufallsvariable  $a^T X$  normal verteilt ist.
2. Ein Zufallsvektor  $X \in \mathbb{R}^d$  ist multivariat normal verteilt dann und nur dann wenn seine charakteristische Funktion folgendermaßen gegeben ist:

$$\phi_X(t) = E(\exp\{it^T X\}) = \exp\{it^T \mu - \frac{1}{2}t^T \Sigma t\}$$

für einen Vektor  $\mu \in \mathbb{R}^d$  und eine positiv semidefinite Matrix  $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ .

3. Ein Zufallsvektor  $X \in \mathbb{R}^d$  mit  $E(X) = \mu$  und  $cov(X) = \Sigma$ , wobei die Determinante von  $\Sigma$  positiv ist ( $det(\Sigma) := |\Sigma| > 0$ ), ist normal verteilt, d.h.  $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$ , dann und nur dann wenn seine Dichtefunktion folgendermaßen gegeben ist

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)}{2} \right\}.$$

Beweis: (siehe zB. Gut 1995)

**Theorem 2** (*Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung*)

Für  $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$  gilt:

*Lineare Kombinationen:*

Für  $B \in \mathbb{R}^{k \times d}$  und  $b \in \mathbb{R}^k$ . Es gilt dann  $BX + b \in N_k(B\mu + b, B\Sigma B^T)$ .

*Randverteilungen:*

Setze  $X^T = (X^{(1)T}, X^{(2)T})$  für  $X^{(1)T} = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$  und  $X^{(2)T} = (X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_d)^T$  und analog

$$\mu^T = (\mu^{(1)T}, \mu^{(2)T}) \text{ und } \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^{(1,1)} & \Sigma^{(1,2)} \\ \Sigma^{(2,1)} & \Sigma^{(2,2)} \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann  $X^{(1)} \sim N_k(\mu^{(1)}, \Sigma^{(1,1)})$  und  $X^{(2)} \sim N_{d-k}(\mu^{(2)}, \Sigma^{(2,2)})$ .

Bedingte Verteilungen:

Wenn  $\Sigma$  regulär, dann ist auch die bedingte Verteilung  $X^{(2)}|X^{(1)} = x^{(1)}$  multivariational normal:

$$X^{(2)}|X^{(1)} = x^{(1)} \sim N_{d-k}\left(\mu^{(2,1)}, \Sigma^{(22,1)}\right) \text{ wobei}$$

$$\mu^{(2,1)} = \mu^{(2)} + \Sigma^{(2,1)}\left(\Sigma^{(1,1)}\right)^{-1}\left(x^{(1)} - \mu^{(1)}\right) \text{ und}$$

$$\Sigma^{(22,1)} = \Sigma^{(2,2)} - \Sigma^{(2,1)}\left(\Sigma^{(1,1)}\right)^{-1}\Sigma^{(1,2)}.$$

Quadratische Formen:

Wenn  $\Sigma$  regulär, dann gilt  $D^2 = (X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu) \sim \chi_d^2$ .  
Die Zufallsvariable  $D$  heißt *Mahalanobis Distanz*.

Faltung:

Seien  $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$  und  $Y \sim N_d(\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma})$  zwei unabhängige Zufallsvektoren. Es gilt dann  $X + Y \sim N_d(\mu + \tilde{\mu}, \Sigma + \tilde{\Sigma})$ .

## Normal (variance) mixture

**Definition 3** Ein Zufallsvektor  $X \in \mathbb{R}^d$  hat eine multivariate "normal variance mixture" Verteilung wenn  $X \stackrel{d}{=} \mu + WAZ$  wobei  $Z \sim N_k(0, I)$  hat eine multivariate standard Normalverteilung,  $W \geq 0$  ist eine von  $Z$  unabhängige positive Zufallsvariable,  $\mu \in \mathbb{R}^d$  ist ein konstanter Vektor,  $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$  ist eine konstante Matrix, und  $I$  ist die Einheitsmatrix.

Unter der Bedingung  $W = w$  ist  $X$  normalverteilt:  $X \sim N_d(\mu, w^2 \Sigma)$ , wobei  $\Sigma = AA^T$ .

$E(X) = \mu$  und  $\text{cov}(X) = E(W^2 AZZ^T A^T) = E(W^2) \Sigma$  falls  $E(W^2) < \infty$

**Beispiel 4** Die Inverse Gamma Verteilung hat folgende Dichtefunktion:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta/x) \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

Falls  $X \sim IG(\alpha, \beta)$  dann gilt:

$$E(X) = \frac{\beta}{\alpha - 1} \quad \text{für } \alpha > 1, \quad \text{var}(X) = \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} \quad \text{für } \alpha > 2$$

Sei  $W^2 \sim IG(\alpha/2, \alpha/2)$ . Dann ist die Verteilung von  $X = \mu + WAZ$  eine multivariate  $t_\alpha$  Verteilung mit  $\alpha$  Freiheitsgraden:  $X \sim t_d(\alpha, \mu, \Sigma)$ .

$$\text{cov}(X) = E(W^2) \Sigma = \frac{\alpha}{\alpha - 2} \Sigma$$

## Sphärische Verteilungen

**Definition 4** Ein Zufallsvektor  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T$  hat eine sphärische Verteilung wenn für jede orthogonale Matrix  $U \in \mathbb{R}^{d \times d}$  die Gleichung  $UX \stackrel{d}{=} X$  gilt.

**Theorem 3** Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

1. Der Zufallsvektor  $X \in \mathbb{R}^d$  hat eine sphärische Verteilung.
2. Es existiert eine Funktion  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass die charakteristische Funktion von  $X$  folgendermaßen gegeben wird:

$$\phi_X(t) = \psi(t^T t) = \psi(t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_d^2)$$

3. Für jeden Vektor  $a \in \mathbb{R}^d$  gilt  $a^T X \stackrel{d}{=} \|a\| X_1$  wobei  $\|a\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_d^2$ .
4.  $X$  lässt sich als  $X \stackrel{d}{=} RS$  repräsentieren, wobei der Zufallsvektor  $S \in \mathbb{R}^d$  gleichmäßig verteilt auf der Einheitskugel  $S^{d-1}$ ,  $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d: \|x\| = 1\}$ , ist, und  $R \geq 0$  eine von  $S$  unabhängige ZV ist.

Notation einer sphärischen Verteilung:  $X \sim S_d(\psi)$

**Beispiel 5** Normalverteilungen sind sphärische Verteilungen.

Sei  $X \sim N(0, I)$ . Dann  $X \sim S_d(\psi)$  mit  $\psi = \exp(-x/2)$ .

Tatsächlich:  $\phi_X(t) = \exp\{it^T 0 - \frac{1}{2}t^T I t\} = \exp\{-t^T t/2\} = \psi(t^T t)$ .

Aus der stochastischen Repräsentation  $X = RS$  folgt  $\|X\|^2 \stackrel{d}{=} R^2 \sim \chi_d^2$ .

### Simulation einer sphärischen Verteilung:

- (i) Simuliere  $s$  aus einer gleichmäßig verteilten Zufallsvektor in  $\mathcal{S}^{d-1}$  (zB. in dem  $y$  aus einer multivariaten Standard Normalverteilung  $Y \sim N(0, I)$  simuliert und  $s = y/\|Y\|$  gesetzt wird).
- (ii) Simuliere  $r$  aus  $R \sim \chi_d^2$ .
- (iii) Setze  $x = rs$ .

## Elliptische Verteilungen

**Definition 5** Ein Zufallsvektor  $X \in \mathbb{R}^d$  hat eine elliptische Verteilung wenn  $X \stackrel{d}{=} \mu + AY$ , wobei  $Y \sim S_k(\psi)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^d$  ist ein konstanter Vektor und  $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$  ist eine konstante matrix.

Die charakteristische Funktion:

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= E(\exp\{it^T X\}) = E(\exp\{it^T(\mu + AY)\}) = \exp\{it^T \mu\} E(\exp\{i(A^T t)^T Y\}) \\ &= \exp\{it^T \mu\} \psi(t^T \Sigma t),\end{aligned}$$

wobei  $\Sigma = AA^T$ .

Notation elliptische Verteilungen:  $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$

$\mu$  heißt Positionsparameter (*location parameter*),

$\Sigma$  heißt Dispersionsparameter (*dispersion parameter*),

$\psi$  heißt charakteristischer Generator der elliptischen Verteilung.

Falls  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  regulär, dann gilt folgende Relation zwischen elliptischen und sphärischen Verteilungen:

$$X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi) \Leftrightarrow A^{-1}(X - \mu) \sim S_d(\psi), \quad A \in \mathbb{R}^{d \times d}, AA^T = \Sigma$$

#### **Theorem 4** ( Charakterisierung der elliptischen Verteilung)

Sei  $X \in \mathbb{R}^d$  ein  $d$ -dimensionaler Zufallsvektor.

$X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$  dann und nur dann wenn  $X \stackrel{d}{=} \mu + RAS$ , wobei  $S \in \mathbb{R}^k$  ist ein auf der Einheitskugel  $\mathcal{S}^{k-1}$  gleichverteilter Zufallsvektor,  $R \geq 0$  ist eine von  $S$  unabhängige nicht negative Zufallsvariable,  $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$  ist eine konstante Matrix ( $\Sigma = AA^T$ ) und  $\mu \in \mathbb{R}^d$  ist ein konstanter Vektor.

#### **Simulation einer elliptischen Verteilung:**

- (i) Simuliere  $s$  aus einer gleichmäßig verteilten Zufallsvektor in  $\mathcal{S}^{d-1}$  (zB. in dem  $y$  aus einer multivariaten Standard Normalverteilung  $Y \sim N(0, I)$  simuliert und  $s = y/\|Y\|$  gesetzt wird).
- (ii) Simuliere  $r$  aus  $R$ .
- (iii) Setze  $x = \mu + rAs$ .

### **Beispiel 6** (Multivariate Normalverteilung)

Sei  $X \sim N(\mu, \Sigma)$ . Es existiert eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ , sodass  $X \stackrel{d}{=} \mu + AZ$  wobei  $Z \in N_d(0, I)$  und  $AA^T = \Sigma$ . Weiters gilt  $Z = RS$  wobei  $S$  ein gleichmäßig verteilter Zufallsvektor in  $S^{k-1}$  ist und  $R^2 \sim \chi_k^2$ . Daraus folgt  $X \stackrel{d}{=} \mu + RAS$  und daher  $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$  mit  $\psi(x) = \exp\{-x/2\}$ .

### **Beispiel 7** (Multivariate normal variance mixture)

Ein Zufallsvektor  $Z \sim N(0, I)$  hat eine sphärische Verteilung mit einer stoch. Repräsentation  $Z \stackrel{d}{=} VS$ . Falls  $X = \mu + WAZ$  eine normal variance mixture ist, dann gilt  $X \stackrel{d}{=} \mu + VWAS$  wobei  $V^2 \sim \chi_d^2$ . D.h.  $X$  hat eine elliptische Verteilung mit  $R = VW$ .