Beispiel 17 *Seien X und Y zwei ZV, die die Verluste zweier Geschäftslinien einer Versicherungsgesellschaft darstellen (Brand- bzw. Autoversicherung). Sei F die Verteilungsfunktion von X für die $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$, $\alpha > 0$, gilt. Weiters gilt $E(Y^k) < \infty$, $\forall k > 0$. Die Versicherungsgesellschaft möchte $\lim_{x\to\infty} P(X > x | X + Y > x)$, d.h. die Wahrscheinlichkeit eines grossen Verlustes bei der Brandversicherung vorausgesetzt es gibt einen grossen Gesamtverlust der zwei Linien, berechnen.*

Klassische Extremwerttheorie

(X_k), $k \in \mathbb{N}$, nicht degenerierte i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion F.

Für $n \geq 1$, $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$, $M_n := \max\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$

Frage: Welche sind die möglichen (nicht degenerierten) Grenzverteilungen von normierten und zentrierten S_n bzw. M_n?

Zunächst wird die Grenzverteilung von S_n untersucht:

Für welche nicht degenerierten ZV Z gibt es zwei Zahlenfolgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass $a_n^{-1}(S_n - b_n)$ in Verteilung gegen Z konvergiert wenn $n \to \infty$. Notation: $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(S_n - b_n) = Z$

Definition 10 *Eine ZV X heisst stabil, wenn für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ und die i.i.d. Kopien X_1 und X_2 von X die Konstanten $a(c_1, c_2) \in \mathbb{R}$ und $b(c_1, c_2) \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $c_1X_1 + c_2X_2$ und $a(c_1, c_2)X + b(c_1, c_2)$ idente Verteilungsfunktionen haben.*

Notation $c_1X_1 + c_2X_2 \stackrel{\mathrm{d}}{=} a(c_1, c_2)X + b(c_1, c_2)$

Theorem 1 *Die Klasse von stabilen Verteilungen stimmt mit der Klasse der nicht degenerierten Grenzverteilungen passend normierter und zentrierter Summen von i.i.d. ZV überein.*

Beweis zB. in Rényi, 1962.

Theorem 2 *Die charakteristische Funktion einer stabilen Verteilung X ist folgendermaßen gegeben:*

$$\varphi_X(t) = E[\exp\{iXt\}] = \exp\{i\gamma t - c|t|^\alpha(1 + i\beta \text{signum}(t) z(t,\alpha))\}$$

wobei $\gamma \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $\alpha \in (0,2]$, $\beta \in [-1,1]$ *und*

$$z(t,\alpha) = \begin{cases} \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) & \text{wenn } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi}\ln|t| & \text{wenn } \alpha = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Beweis: Lévy 1954, Gnedenko und Kolmogoroff 1960.

Definition 11 *Der Parameter α in (4) heißt charakteristischer Exponent, die dazugehörige Verteilung heißt α-stabil und ihre Verteilungsfunktion wird mit G_α bezeichnet.*

Definition 12 *Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion F. Angenommen es existieren die Zahlenfolgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass* $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(S_n - b_n) = G_\alpha$, *für eine α-stabile Verteilung G_α, dann heißt es "F gehört dem Anziehungsgebiet von G_α". Notation: $F \in DA(G_\alpha)$.*

Anmerkung: $X \sim G_2 \Longleftrightarrow \varphi_X(t) = \exp\{i\gamma t - \frac{1}{2}t^2(2c)\} \Longleftrightarrow X \sim N(\gamma, 2c)$

Übung 4 *Zeigen Sie, dass $F \in DA(G_2) \Longleftrightarrow F \in DA(\phi)$, wobei ϕ die Gausssche Verteilung $N(0,1)$ ist.*

Hinweis: Wenden Sie den "Convergence to types"-Satz an (siehe die folgenden Folien).

Theorem 3 (Charakterisierung des Anziehungsgebietes)

(i)

$$F \in DA(\phi) \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \int_{[-x,x]^C} dF(y)}{\int_{[-x,x]} y^2 dF(y)} = 0,$$

wobei $[-x,x]^C$ *das Komplement von* $[-x,x]$ *in* $\mathbb{R}$ *ist.*

(ii) Für $\alpha \in (0,2)$ *gilt:*

$$F \in DA(G_\alpha) \Longleftrightarrow F(-x) = \frac{c_1 + o(1)}{x^\alpha} L(x), \bar{F}(x) = \frac{c_2 + o(1)}{x^\alpha} L(x),$$

wobei L *eine langsam variierende Funktion ist und* $c_1, c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$.

Bekannt auch als Satz von Lévy, Feller und Chintschin.
Beweis in Rényi, 1962.

Anmerkung: $F \in DA(G_\alpha)$ für $\alpha \in (0,2)$ dann $E(|X|^\delta) < \infty$ für $\delta < \alpha$ und $E(|X|^\delta) = \infty$ für $\delta > \alpha$.

Beweis: Hausübung!

Grenzverteilungen von normierten und zentrierten Maxima

(X_k), $k \in \mathbb{N}$, nicht degenerierte i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion F.

Für $n \geq 1$, $M_n := \max\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$

Frage: Welche sind die möglichen (nicht degenerierten) Grenzverteilungen von normierten und zentrierten M_n?

D.h. wir untersuchen

$$\lim_{n\to\infty} P(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq x) = \lim_{n\to\infty} P(M - n \leq u_n),$$

wobei $u_n = a_n x + b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Theorem 4 *(Poisson Approximation)*
Sei $\tau \in [0, \infty]$ und eine Zahlenfolge $u_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(u_n) = \tau \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(M_n \leq u_n) = exp\{-\tau\}.$$