

Verwendung eines nicht-parametrischen Bootstrapping Verfahrens zu Ermittlung von Konfidenzintervallen

Seien die ZV X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. mit Verteilungsfunktion F und sei x_1, x_2, \dots, x_n eine Stichprobe daraus.

Gesucht: Schätzung eines von F abhängigen Parameters θ , e.g. $\theta = q_\alpha(F)$, und das dazugehörige Konfidenzintervall.

Sei $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ ein Schätzer von θ , zB. $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = x_{[(n-1)\alpha]+1, n}$.

Das gesuchte Konfidenzintervall ist ein (a, b) ,
 $a = a(x_1, \dots, x_n)$ u. $b = b(x_1, \dots, x_n)$, sodass $P(a < \theta < b) = p$,
für ein vorgegebenes Konfidenzniveau p .

Fall I: F ist bekannt.

Durch Simulation von F werden N Stichproben (N groß) $\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \dots, \tilde{x}_n^{(i)}$, $1 \leq i \leq N$, erzeugt.

Sei $\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \dots, \tilde{x}_n^{(i)})$, $1 \leq i \leq N$.

Empirische Verteilungsfunktion von $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$:

$$F_N^{\hat{\theta}} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{[\tilde{\theta}_i, \infty)}(x) \rightarrow F^{\hat{\theta}} \text{ für } N \rightarrow \infty.$$

Das gesuchte Konf.intervall: $\left(q_{\frac{1-p}{2}}(F_N^{\hat{\theta}}), q_{\frac{1+p}{2}}(F_N^{\hat{\theta}}) \right)$

Fall 2: F ist unbekannt.

Empirische Verteilungsfunktion von X_i , $1 \leq i \leq n$, ist:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[x_i, \infty)}(x).$$

n groß $\implies F_n \approx F$.

Ziehe n mal aus F_n mit Zurücklegung: Stichprobe $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Nehme N solche Stichproben: $x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \dots, x_n^{*(i)}$, $1 \leq i \leq N$.

Berechne $\theta_i^* = \hat{\theta}(x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \dots, x_n^{*(i)})$.

Die empirische Verteilungsfunktion $F_N^{\theta^*}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{[\theta_i^*, \infty)}(x)$

approximiert die Verteilungsfunktion $F^{\hat{\theta}}$ von $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Konfidenzintervall (a, b) : $a = q_{(1-p)/2}(F_N^{\theta^*})$, $b = q_{(1+p)/2}(F_N^{\theta^*})$.

D.h. $a = \theta_{[N(1+p)/2]+1, N}^*$, $b = \theta_{[N(1-p)/2]+1, N}^*$,

wobei $\theta_{1, N}^* \geq \theta_{2, N}^* \geq \dots \geq \theta_{N, N}^*$ durch Sortierung von $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_N^*$ entsteht.

Zusammenfassung des nicht-parametrischen Bootstrap Verfahrens zur Berechnung von Konfidenzintervallen

Gegeben: Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n der i.i.d. ZV. X_1, X_2, \dots, X_n mit Verteilungsfunktion F und ein Schätzer $\theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$ eines unbekanntes Parameters θ .

Gesucht: Ein Konfidenzintervall I_p für θ mit vorgegebenem Konfidenzniveau p .

- Bilde N neue Stichproben $x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \dots, x_n^{*(i)}$, $1 \leq i \leq N$, durch Ziehung mit Zurücklegung aus $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
- Berechne $\theta_i^* = \hat{\theta}(x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \dots, x_n^{*(i)})$.
- $I_p = (\theta_{[N(1+p)/2]+1,N}^*, \theta_{[N(1-p)/2]+1,N}^*)$, wobei $\theta_{1,N}^* \geq \theta_{2,N}^* \geq \dots \theta_{N,N}^*$ durch Sortierung von $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_N^*$ entsteht

Eine approximative Lösung ohne Bootstrap

Gegeben: Eine Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n von ZV X_i , $1 \leq i \leq n$, i.i.d. mit unbekannter kontinuierlicher Verteilungsfunktion F .

Gesucht: Ein Konfidenzintervall (a, b) für $q_\alpha(F)$, $a = a(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $b = b(x_1, x_2, \dots, x_n)$, sodass

$$P(a < q_\alpha(F) < b) = p \text{ und } P(a \geq q_\alpha(F)) = P(b \leq q_\alpha(F)) = (1 - p)/2$$

Wir suchen $i > j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, und das kleinste $p' > p$, sodass

$$P(x_{i,n} < q_\alpha(F) < x_{j,n}) = p' \quad (*) \quad \text{und}$$

$$P(x_{i,n} \geq q_\alpha(F)) \leq (1 - p)/2 \text{ und } P(x_{j,n} \leq q_\alpha(F)) \leq (1 - p)/2 (**),$$

wobei $x_{1,n} \geq x_{2,n} \geq \dots \geq x_{n,n}$ durch Sortierung von x_1, x_2, \dots, x_n entsteht.

Sei $Y_\alpha = \#\{x_k : x_k > q_\alpha(F)\}$

Es gilt: $P(x_{j,n} \leq q_\alpha(F)) = P(x_{j,n} < q_\alpha(F)) = P(Y_\alpha \leq j - 1)$

$P(x_{i,n} \geq q_\alpha(F)) = P(x_{i,n} > q_\alpha(F)) = 1 - P(Y_\alpha \leq i - 1)$

$Y_\alpha \sim B(n, 1 - \alpha)$. Berechne $P(x_{j,n} \leq q_\alpha(F))$ und $P(x_{i,n} \geq q_\alpha(F))$ für unterschiedliche i und j solange bis $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i > j$, gefunden werden, die (*) und (**) erfüllen.

Historische Simulation

Seien x_{m-n+1}, \dots, x_m historische Beobachtungen der Veränderungen der Risikofaktoren X_{m-n+1}, \dots, X_m .

Annahme: Die historischen Verluste sind i.i.d.

Die historischen Verlustwerte $l_k = l_{[m]}(x_{m-k+1})$, $k = 1, 2, \dots, n$, stellen eine Stichprobe der Verlustverteilung dar.

Empirischer VaR: $\widehat{VaR} = q_\alpha(\widehat{F}_n^L) = l_{[n(1-\alpha)]+1, n}$

Empirischer CVaR: $\widehat{CVaR} = \frac{\sum_{i=1}^{[n(1-\alpha)]+1} l_{i, n}}{[n(1-\alpha)]+1}$,

wobei $l_{1, n} \geq l_{2, n} \geq \dots \geq l_{n, n}$ durch die Sortierung von l_i , $1 \leq i \leq n$, entsteht.

VaR und CVaR des aggregierten Verlustes über mehrere Tage, zB. 10 Tage, kann mit Hilfe der Verlustwerte

$$l_k^{(10)} = l_{[m]} \left(\sum_{j=1}^{10} x_{m-n+10(k-1)+j} \right) \quad k = 1, \dots, [n/10]$$

geschätzt werden.

Historische simulation - Folgerung

Vorteile:

- einfache Implementierung
- berücksichtigt die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Komponenten des Vektors der Veränderungen der Risikofaktoren $X_{m-k} = (X_{m-k,1}, \dots, X_{m-k,d})$.

Nachteile:

- sehr viele historische Daten notwendig um zuverlässige Schätzer zu bekommen
- Schätzung impliziert, dass der geschätzte Verlust nicht grösser als bereits historisch realisierte Verluste sein kann.

Varianz-Kovarianz Methode

Grundidee: Verwendung der linearisierten Verlustfunktion.

$$L_{m+1}^{\Delta} = l_m^{\Delta} = -V \sum_{i=1}^d w_i X_{m+1,i} = -V w^T X_{m+1}$$

wobei $V := V_m$, $w_i := w_{m,i}$, $w = (w_1, \dots, w_d)^T$,
 $X_{m+1} = (X_{m+1,1}, X_{m+1,2}, \dots, X_{m+1,d})^T$.

Annahme: $X_{m+1} \sim N_d(\mu, \Sigma)$

Daraus folgt: $-V w^T X_{m+1} \sim N(-V w^T \mu, V^2 w^T \Sigma w)$ (siehe Bsp. (8))

Seien X_{m-n+1}, \dots, X_m historische Beobachtung der Veränderungen der Risikofaktoren.

Annahme: X_{m-n+1}, \dots, X_m sind i.i.d.

Schätzer für μ_i : $\hat{\mu}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{m-k+1,i}$, $i = 1, 2, \dots, d$

Schätzer $\hat{\Sigma} = (\hat{\sigma}_{ij})$ für $\Sigma = (\sigma_{ij})$:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_{m-k+1,i} - \mu_i)(X_{m-k+1,j} - \mu_j) \quad i, j = 1, 2, \dots, d$$

Schätzer für VaR: $\widehat{VaR}(L_{m+1}) = -V w^T \hat{\mu} + \sqrt{V^2 w^T \hat{\Sigma} w} \phi^{-1}(\alpha)$.

Varianz-Kovarianz Methode - Folgerung

Vorteile:

- analytische Lösung
- einfache Implementierung
- keine Simulationen notwendig

Nachteile:

- Linearisierung nicht immer adäquat, nur für kuzes Zeithorizont gerechtfertigt (siehe Übung (2)).
- Annahme der Normalverteilung könnte zur Unterschätzung des Risikos führen und sollte begründet werde (zB. anhand von historischen Daten).

Monte-Carlo Verfahren

Historische Beobachtungen der Risikofaktoren und deren Veränderungen



Annahme über ein parametrisches Modell für die Verteilungsfunktion der Veränderung der Risikofaktoren X_{m+1} ; zB. Verteilungsfunktion F und Unabhängigkeit von X_{m-n+1}, \dots, X_m .



Schätzung der charakteristischen Parameter dieser Verteilungsfunktion.

Nehme N Stichproben $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$ aus F (N muss gross genug sein).

Sei $l_k = l_{[m]}(\tilde{x}_k)$

Empirische Verteilungsfunktion der Verlust L_{m+1} :

$$\hat{F}_N^{L_{m+1}}(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N I_{[l_k, \infty)}(x).$$

Schätzer für VaR: $\widehat{VaR}(L_{m+1}) = q_\alpha(\hat{F}_N^{L_{m+1}}) = l_{[N(1-\alpha)]+1, N}$

Monte-Carlo Verfahren - Folgerung

Schätzer für CVaR: $\widehat{CVaR}(L_{m+1}) = \frac{\sum_{k=1}^{[N(1-\alpha)]+1} l_{k,N}}{[N(1-\alpha)]+1}$.

Vorteile:

- Sehr flexibel; kann jedes Modell verwendet werden aus dem simuliert werden kann
- Berücksichtigung von zeitlichen Abhängigkeiten zwischen den Veränderungen der Risikofaktoren möglich etwa durch Verwendung von Zeitreihen

Nachteile:

- Rechenintensiv; große Anzahl von Simulationen notwendig um gute Schätzwerte zu bekommen.

Monte-Carlo Verfahren - Folgerung

Beispiel 11 *PF besteht aus ein Stück der Aktie S mit Preis $=S_t$ zum Zeitpunkt t . Die Veränderungen der Risikofaktoren*

$$X_{k+1} = \ln(S_{t_{k+1}}) - \ln(S_{t_k}),$$

sind i.i.d. mit Verteilungsfunktion F_θ , wobei θ ist ein unbekannter Parameter.

*θ kann mit Hilfe von hist. Daten geschätzt werden (zB. ML Verfahren)
Sei der heutige Preis $S_{t_k} = S$*

VaR des PF über $[t_k, t_{k+1})$: $VaR_\alpha = S(1 - \exp\{F_\theta^{\leftarrow}(1 - \alpha)\})$.

Wenn F_θ kompliziert kann die analytische Berechnung von CVaR schwierig sein. Alternative: Monte-Carlo Simulation.

Monte-Carlo Verfahren - Folgerung

Beispiel 12 *PF und X_{k+1} wie im obigen Beispiel.*

*Populäres Modell für die log. Rendite einer Aktie: GARCH(1,1)
(siehe zB. Alexander 2002):*

$$X_{k+1} = \sigma_{k+1} Z_{k+1} \quad (1)$$

$$\sigma_{k+1}^2 = a_0 + a_1 X_k^2 + b_1 \sigma_k^2 \quad (2)$$

wobei $Z_k : k \in \mathbb{N}$ sind i.i.d. und $\sim N(0, 1)$, a_0, a_1 und b_1 sind Parameter die geschätzt werden.

Es ist einfach aus diesem Modell zu simulieren.

*Analytische Berechnung der VaR bzw. CVaR für ein Zeitintervall bestehend aus mehreren Perioden sind hingegen schwierig!
Ausprobieren!*

Extremwerttheorie

Notation:

- Wir verwenden oft dieselbe Notation für die Verteilung einer ZV und ihre Verteilungsfunktion!
- $f(x) \sim g(x)$ für $x \rightarrow \infty$ bedeutet $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$
- $\bar{F} := 1 - F$ (“right Tail” einer univariaten Verteilungsfunktion F).

Bezeichnungskonvention: Man sagt eine ZV X hat “fat Tails” oder ist “heavy tailed” (h.t.) wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\lambda x}} = \infty \quad \forall \lambda > 0$.

Auch eine ZV X für die $\exists k \in \mathbb{N} \quad E(X^k) = \infty$ wird oft *heavy tailed* genannt.

Reguläre Variation

Definition 8 Eine meßbare Funktion $h: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ besitzt eine reguläre Variation mit Index ρ um ∞ wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^\rho \quad \forall x > 0 \quad (3)$$

Bezeichnung: $h \in RV_\rho$.

Wenn $\rho = 0$, dann heißt es "h variiert langsam um ∞ ".

Wenn $h \in RV_\rho$ dann $h(x)/x^\rho \in RV_0$.

Falls $h \in RV_\rho$, dann $\exists L \in RV_0$ sodass $h(x) = L(x)x^\rho$ ($L(x) = h(x)/x^\rho$).

Falls $\rho < 0$, dann ist die Konvergenz in (3) gleichmäßig in jedem Intervall (b, ∞) für $b > 0$.

Beispiel 13 1. Zeigen Sie, dass $L \in RV_0$ gilt.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = c \in (0, \infty)$

(b) $L(x) = \ln(1 + x)$

(c) $L(x) = \ln(1 + \ln(1 + x))$

2. Gilt es $f \in RV_0$ für $f(x) = 3 + \sin x$, $f(x) = \ln(e + x) + \sin x$?

Eine Funktion $L \in RV_0$ kann unendlich stark variieren um ∞ im Sinne, dass

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} L(x) = 0 \text{ and } \limsup_{x \rightarrow \infty} L(x) = \infty$$

Ein Beispiel dafür ist $L(x) = \exp\{(\ln(1+x))^2 \cos((\ln(1+x))^{1/2})\}$.

Beispiel 14 Sei $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$, für $x > 1$ und $\alpha > 0$. Dann gilt $\bar{F}(tx)/\bar{F}(x) = x^{-\alpha}$ für $t > 0$. D.h. $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$.

Beispiel 15 Let $F(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}$ für $x > 0$ und $\alpha > 0$. Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x)/x^{-\alpha} = 1$. Daraus folgt $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$.

Definition 9 Sei $X > 0$ eine ZV mit Verteilungsfunktion F . Man sagt X hat eine reguläre Variation wenn $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$ für ein $\alpha > 0$.

Aussage 1 Sei $X > 0$ eine ZV mit Verteilungsfnk. F sodass $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$ für ein $\alpha > 0$. Es gilt dann $E(X^\beta) < \infty$ für $\beta < \alpha$ und $E(X^\beta) = \infty$ für $\beta \geq \alpha$.

Die Umkehrung gilt nicht!

Aussage 2 (i) Eine meßbare Funktion $h: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ hat eine reguläre Variation um ∞ wenn eine Funktion g existiert, sodass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(tx)/h(t) = g(x) \quad \forall x > 0.$$

In diesem Fall gilt $g(x) = x^\rho$ für ein $\rho \in \mathbb{R}$ und dann $h \in RV_\rho$.

(ii) Eine monotone Funktion $h: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ hat eine reguläre Variation um ∞ wenn eine Folge (a_n) von positiven Zahlen und eine Funktion ξ gibt, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nh(a_n x) = \xi(x) \quad \forall x > 0.$$

In diesem Fall gilt $\xi(x)/\xi(1) = x^\rho$ für ein $\rho \in \mathbb{R}$ und dann $h \in RV_\rho$.

Siehe Resnick 1987 für ein Beweis.

Beispiel 16 Seien X_1 und X_2 zwei nichtnegative i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion F , $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$ für ein $\alpha > 0$. Annahme: X_1 (X_2) gibt den Verlust eines Portfolios bestehend aus 1 Stück der Aktie A_1 (A_2) an. Weiters kosten A_1 und A_2 gleich viel. Ein Investor hat 2 Stück der Aktie A_1 gekauft. Die Wahrsch., dass sein Verlust grösser als l ist, wird durch $P(2X_1 > l)$ gegeben. Kann der Investor die Verlustwahrsch. verringern in dem er auf ein diversifiziertes Portfolio bestehend aus einem Stück der Aktie A_1 und einem Stück der Aktie A_2 wechselt?

Beispiel 17 Seien X und Y zwei ZV, die die Verluste zweier Geschäftslinien einer Versicherungsgesellschaft darstellen (Brand- bzw. Autoversicherung). Sei F die Verteilungsfunktion von X für die $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$, $\alpha > 0$, gilt. Weiters gilt $E(Y^k) < \infty$, $\forall k > 0$. Die Versicherungsgesellschaft möchte $\lim_{x \rightarrow \infty} P(X > x | X + Y > x)$, d.h. die Wahrscheinlichkeit eines grossen Verlustes bei der Brandversicherung vorausgesetzt es gibt einen grossen Gesamtverlust der zwei Linien, berechnen.