Verwendungszweck von Risikomanagement:

- Bestimmung der Mindestkapitalanforderungen:
  Kapital, das benötigt wird um event. Verluste abzudecken.

- Als Management Tool:
  zur Bestimmung der Risiken die unterschiedliche Einheiten einer Firma eingehen dürfen.

Einige Grundlegende Risikomaße

- Gewichtete Summe der Aktiva (Assetklassenspezifische Gewichte)

  ZB. Basel I (1998):

  $$\textit{Cooke Ratio} = \frac{\text{Eigenkapital}}{\text{risikogewichtete Summe der Aktiva}} \geq 8\%$$

  $$\text{Gewicht} := \begin{cases} 0 & \text{für Forderungen gegenüber staatlichen Schuldnern (OECD-Staaten)} \\ 20 & \text{für Forderungen gegenüber Kreditinstituten} \\ 50 & \text{für grundpfandrechtlich gesicherte Realkredite} \\ 100 & \text{für alle sonstigen Risikoaktiva, d. h. alle Kredite an Unternehmen} \end{cases}$$

  Nachteile: Kein Unterschied zwischen Long und Short Positionen, berücksichtigt keine Diversifikationseffekte.

- Sensitivität gegenüber Risikofaktoren

  Portfoliowert zum Zeitpunkt t_n: $V_n = f(t_n, Z_n)$,
  Z_n ist ein Vektor von d Risikofaktoren

  Sensitivitätskoeffizienten: $f_{z_i} = \frac{\delta f}{\delta z_i}(t_n, Z_n)$, $1 \le i \le d$

  Beispiel: "The Greeks" eines PF sind die Sens.koeffizienten

  Nachteile: Aggregierung zum Risikomaß bei simultanen Veränderungen von mehreren Faktoren schwierig;
  bei mehreren Märkten ist Aggregierung zum Risikomaß für das Gesamtportfolio schwierig;

- Szenario basierte Risikomaße

  Sein N die Anzahl möglicher Veränderungen der Risikofaktoren (= Szenarien).

  Sei $\chi = \{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ die Menge der Szenarien und
  $l_{[n]}(\cdot)$ der Verlustoperator des PF.

  Jedem Szenario wird ein Gewicht w_i, $1 \le i \le N$, zugeordnet

  Portfoliorisiko:

  $\Psi[\chi, w] = \max\{w_1 l_{[n]}(X_1), w_2 l_{[n]}(X_2), \ldots, w_N l_{[n]}(X_N)\}$

Beispiel 6 *SPAN Regeln verwendet von CME* (siehe Artzner et al., 1999)

PF besteht aus mehreren einheiten eines Future Kontrakts und mehreren Put bzw. Call Optionen desselben Kontakts mit gleicher Laufzeit.

Berechnung der SPAN Marge:

Szenarien i, $1 \leq i \leq 14$:

Szenarien 1 bis 8		Szenarien 9 bis 14	
Volatilität	Preis der Future	Volatilität	Preis der Future
$\nearrow$ $\searrow$	$\nearrow \frac{1}{3} * Range$ $\nearrow \frac{2}{3} * Range$ $\nearrow \frac{3}{3} * Range$ $\longrightarrow$	$\nearrow$ $\searrow$	$\searrow \frac{1}{3} * Range$ $\searrow \frac{2}{3} * Range$ $\searrow \frac{3}{3} * Range$

Szenarien i, $i = 15, 16$ *stellen extreme Bewegungen nach oben bzw. unten des Futurepreises*

$$w_i = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq 14 \\ 0,35 & 15 \leq i \leq 16 \end{cases}$$

Ein bestimmtes Modell (zB. Black-Scholes) wird verwendet um die Optionpreise in den entsprechenden Szenarien zu generieren.

- Verfahren basierend auf die Verlustverteilung.

  Der Verlust L_{n+1} wird mit Hilfe einer Wahrsch.verteilung $F_{L_{n+1}}$ modelliert, entweder direkt oder mit Hilfe der Risikofaktoren.

  Die Parameter von $F_{L_{n+1}}$ werden anhand von historischen Daten geschätzt.

  1. Die Standardabweichung (STD)
     Wird vor allem in der PF-Theorie verwendet.

     Nachteile:

     – STD existiert nur für Verteilungen mit $E(L^2) < \infty$, d.h. Probleme bei "fat tailed" (leptokurtischen) Verlustverteilungen;

     – Gewinne und Verluste beeinflussen die Standardabweichung gleichermaßen.

     Beispiel 7 $L_1 \sim N(0,2)$, $L_2 \sim t_4$ *(Student Verteilung mit 4 Freiheitsgraden)*
     Es gilt $\sigma^2(L_1) = 2$ *und* $\sigma^2(L_2) = \frac{m}{m-2} = 2$
     Die Verlustwarsch. ist jedoch viel größer bei L_2 *als bei* L_1.
     Plote den logarithmischen Quotient $\ln[P(L_2 > x)/P(L_1 > x)]$*!*

2. Value at Risk (VaR)

Definition 4 *Sei L eine Verlustfunktion und $\alpha \in (0,1)$ ein gegebenes Konfidenzniveau.*
$VaR_\alpha(L)$ ist die kleinste Zahl l, sodass $P(L > l) \leq 1 - \alpha$ gilt.

$VaR_\alpha(L) = \inf\{l \in \mathbb{R} \colon P(L > l) \leq 1 - \alpha\} =$
$\inf\{l \in \mathbb{R} \colon 1 - F_L(l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R} \colon F_L(l) \geq \alpha\}$

zB. ein Vorschlag von BIS (Bank of International Settlements): $VaR_{99\%}$ über ein Horizont von 10 Tagen soll als Maß für das Marktrisiko eines PF verwendet werden.

Definition 5 *Sei $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion (d.h. $x \leq y \Longrightarrow F(x) \leq F(y)$). Die Funktion $F^{\leftarrow} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \inf\{x \in \mathbb{R} \colon F(x) \geq y\}$ heißt verallgemeinerte inverse Funktion von F. Hier gilt $\inf \emptyset = \infty$.*

Falls F streng monoton steigend, dann gilt $F^{-1} = F^{\leftarrow}$.

Definition 6 *Sei $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion.*
$q_\alpha(F) := \inf\{x \in \mathbb{R} \colon F(x) \geq \alpha\}$ heist α-Quantil von F.

Für die Funktion L und seiner Verteilungsfunktion F gilt: $VaR_\alpha(L) = q_\alpha(F)$.

Beispiel 8 *Sei* $L \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Es gilt $VaR_\alpha(L) = \mu + \sigma q_\alpha(\Phi) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)$,
wobei Φ *die Verteilungsfunktion eine ZV* $X \sim N(0,1)$ *ist.*

Übung 1 *Sei* $F\colon [0, +\infty) \to [0,1]$ *mit* $F(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x \end{cases}$

$F^{-1} =?$

Übung 2 *Portfolio PF besteht aus* 5 *Stück einer Aktie* A*. Der heutige Preis von* A *ist* $S_0 = 100$*. Die täglichen Log-Rendite sind normal verteilt:* $X_1 = \ln \frac{S1}{S_0}$, $X_2 = \ln \frac{S2}{S_1}, \ldots \sim N(0, 0.1)$*. Sei* L_1 *der 1-Tages PF-Verlust von heute auf morgen. Für eine normal verteilte ZV* $Z \sim N(0,1)$ *gilt* $F^{-1}(0.99) \approx 2.3$.

(a) $VaR_{0.99}(L_1) =?$

(b) *Berechnen Sie* $VaR_{0.99}(L_{100})$ *und* $VaR_{0.99}(L^{\triangle}_{100})$*, wobei* L_{100} *der 100-Tage PF-Verlust über einen Zeithorizont von 100 Tagen ausgehend von heute ist.* $L^{\triangle}_{100}$ *ist die Linearisierung des obigen 100-Tage PF-Verlustes.*

3. *Conditional Value at Risk* (CVaR) (oder *Expected Shortfall* (ES))

Ein Nachteil von VaR: Gibt keine Auskunft darüber wie groß der Verlust sein könnte falls $L \geq VaR_\alpha(L)$.

Definition 7 *Sei α ein vorgegebenes Konfidenzniveau und L eine kontinuierliche Verlustfunktion mit Verteilungsfunktion F_L. $CVaR_\alpha(L) := ES_\alpha(L) = E(L|L \geq VaR_\alpha(L))$.*

$CVaR_\alpha(L) = E(L|L \geq VaR_\alpha(L)) = \frac{E(LI_{[q_\alpha(L),\infty))}(L)}{P(L \geq q_\alpha(L))} = \frac{1}{1-\alpha}E(LI_{[q_\alpha(L),\infty)}) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{q_\alpha(L)}^{+\infty} l dF_L(l)$

I_A ist die Indikator Funktion der Menge A: $I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

Lemma 1 *Sei α ein vorgegebenes Konfidenzniveau und L eine kontinuierliche Verlustfunktion mit Verteilungsfunktion F_L. Es gilt $CVaR_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_p(L)dp$.*

Sei F_L die diskrete Verteilungsfunktion einer Verlustverteilung L und ein vorgegebenes Konfidenzniveau α. Der *generalized CVaR* ist

$$GCVaR_\alpha(L) := \frac{1}{1-\alpha}\left[E(LI_{[q_\alpha(L),\infty)}) + q_\alpha(L)\Big(1 - \alpha - P(L \geq q_\alpha(L))\Big)\right]$$

Beispiel 9 *(a) Sei* $L \sim Exp(\lambda)$. $CVaR_\alpha(L) =$?

(b) Die Verteilungsfunktion F_L *der Verlustfunktion* L *ist folgendermaßen gegeben:* $F_L(x) = 1 - (1 + \gamma x)^{-1/\gamma}$, $x \geq 0$, $\gamma \in (0,1)$. $CVaR_\alpha(L) =$?

Beispiel 10 *Sei* $L \sim N(0,1)$. *Seien* ϕ *und* Φ *die Dichte- bzw. Verteilungsfunktion von* L. *Es gilt* $CVaR_\alpha(L) = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$.

Sei $L' \sim N(\mu, \sigma^2)$. *Es gilt* $CVaR_\alpha(L') = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$.

Übung 3 *Sei die Verteilungsfunktion von* L *die Student Verteilung mit* $\nu > 1$ *Freiheitsgraden Die Dichtefunktion von* L *ist*

$$g_\nu(x) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\nu/2)}(1 + \frac{x^2}{\nu})^{-(\nu+1)/2}$$

Zeigen Sie, dass $CVaR_\alpha(L) = \frac{g_\nu(t_\nu^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}\left(\frac{\nu + (t_\nu^{-1}(a))^2}{\nu - 1}\right)$, *wobei* t_ν *die Verteilungsfunktion von* L *ist.*

Methoden zur Berechnung von VaR und CVaR

Portfoliowert: $V_m = f(t_m, Z_m)$

Z_m ist der Vektor von Risikofaktoren.

Verlustfunktion: $L_{m+1} = l_{[m]}(X_{m+1})$

X_{m+1} ist der Vektor der Veränderungenn der Risikofaktoren.

Beobachtungen (historische Daten): $Z_{m-n+1}, \ldots, Z_m$.

Wie können diese historischen Daten zur Berechnung
von $VaR(L_{m+1})$, $CVaR(L_{m+1})$ verwendet werden?

Das empirische VaR bzw. CVaR

Sei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Stichprobe für die unabhängigen ZV $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F
(Notation: Die ZV $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind i.i.d.)

Empirische Verteilungsfunktion: $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{[x_k,+\infty)}(x)$

Empirisches Quantil: $q_\alpha(F_n) = \inf\{x \in \mathbb{R} \colon F_n(x) \geq \alpha\} = F_n^{\leftarrow}(\alpha)$

Annahme: $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$. Dann gilt: $q_\alpha(F_n) = x_{[n(1-\alpha)]+1}$,
wobei $[y] = \sup\{n \in \mathbb{N} \colon n \leq y\}$ für jedes $y \in \mathbb{R}$.

$\widehat{q}_\alpha(F) := q_\alpha(F_n)$ ist der empirische Schätzer des Quantils $q_\alpha(F)$.

Lemma 2 *Sei F eine streng monoton steigende Funktion.*
Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \widehat{q}_\alpha(F) = q_\alpha(F)$, $\forall \alpha \in (0,1)$.

Der empirische Schätzer des CVaR ist

$$\widehat{CVaR}_\alpha(F) = \frac{\sum_{k=1}^{[n(1-\alpha)]+1} x_k}{[(n(1-\alpha)]+1}$$