CreditRisk$^+$ - Eine Poisson Mixture Modell

(siehe Crouhy et al. (2000), CSFB (1997)

k unabhängige Risikofaktoren $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$, $Z_j \sim \gamma(\alpha_j, \beta_j)$, $j = 1, 2, \ldots, k$, sodass $E(Z_j) = 1$.

$\lambda_i(Z) = \bar{\lambda}_i \sum_{j=1}^{k} a_{ij} Z_j$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

$E(\lambda_i(Z)) = \bar{\lambda}_i > 0$ sind Konstanten.

Die Dichte von Z_j ist folgendermassen gegeben: $f_j(z) = \frac{z^{\alpha_j - 1} \exp\{-z/\beta_j\}}{\beta_j^{\alpha_j} \Gamma(\alpha_j)}$

Verlust bei Kredit i durch Zahlungsunfähigkeit von Kreditnehmer i: $LGD_i = (1 - \lambda_i) L_i$, $1 \leq i \leq n$, wobei λ_i die erwartete deterministische 'Recovery rate' ist und L_i die Höhe von Kredit i ist.

Jeder Verlust wird als ganzzahliges Vielfaches einer vordefinierten Verlusteinheit L_0 (zB. $L_o = 10^6$ Euro):

$$LGD_i = (1 - \lambda_i) L_i \approx \left[\frac{(1 - \lambda_i) L_i}{L_0} \right] L_0 = v_i L_0$$

wobei $[x] = \text{argmin}\{t - x \colon t \in \mathbb{Z}, t - x \in (-1/2, 1/2]\}$.

Das Ziel ist, die Verlustverteilung durch eine diskrete Verteilung zu approximieren und für diese die Erzeugende Funktion zu ermitteln.

Sei Y eine diskrete Zufallsvariable mit Wertebereich $\{y_1, \ldots, y_m\}$.

Definition 2 *Die erzeugende Funktion von Y ist folgendermassen gegeben:* $g_Y(t) = E(t^Y) = \sum_{i=1}^m t^{y_i} P(Y = y_i)$, $t \in [0, 1]$.

Einige Eigenschaften der erzeugenden Funktionen:

(i) Wenn $Y \sim Bernoulli(p)$ dann $g_Y(t) = 1 + p(t-1)$.

(ii) Wenn $Y \sim Poisson(\lambda)$, dann $g_Y(t) = \exp\{\lambda(t-1)\}$.

(iii) Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$g_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \Pi_{i=1}^n g_{X_i}(t).$$

(iv) Sei Y eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion f und sei $g_{X|Y=y}(t)$ die erzeugenden Funktion von $X|Y = y$. Dann gilt

$$g_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{X|Y=y}(t) f(y) dy.$$

(v) Sei $g_X(t)$ die erzeugende Funktion von X. Dann gilt

$$P(X = k) = \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) \text{ wobei } g^{(k)}(t) = \frac{d^k g(t)}{dt^k}.$$

Die Erzeugende Funktion der Verlustverteilung

Die Verlustfunktion: $L = \sum_{i=1}^{n} X_i v_i L_0$.

(a) Ermittlung der erzeugenden Funktion für $N = X_1 + \ldots + X_n$

$X_i|Z \sim Poisson(\lambda_i(Z))$, $\forall i \Longrightarrow g_{X_i|Z}(t) = \exp\{\lambda_i(Z)(t-1)\}$, $\forall i \Longrightarrow$

$$g_{N|Z}(t) = \Pi_{i=1}^{n} g_{X_i|Z}(t) = \Pi_{i=1}^{n} \exp\{\lambda_i(Z)(t-1)\} = \exp\{\mu(t-1)\},\ \mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(Z). \tag{4}$$

$$\begin{aligned} g_N(t) \quad = \quad & \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g_{N|Z=(z_1,z_2,\ldots,z_m)} f_1(z_1) \ldots f_m(z_m) dz_1 \ldots dz_m = \\ & \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \exp\{\sum_{i=1}^{n} (\bar{\lambda}_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} z_j)(t-1)\} f_1(z_1) \ldots f_m(z_m) dz_1 \ldots dz_m = \\ & \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \exp\{(t-1) \sum_{j=1}^{m} (\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i a_{ij}}_{\mu_j}) z_j)\} f_1(z_1) \ldots f_m(z_m) dz_1 \ldots dz_m = \\ & \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \exp\{(t-1)\mu_1 z_1\} f_1(z_1) dz_1 \ldots \exp\{(t-1)\mu_m z_m\} f_m(z_m) dz_m = \\ & \Pi_{j=1}^{m} \int_0^\infty \exp\{z_j \mu_j (t-1)\} \frac{1}{\beta_j^{\alpha_j} \Gamma(\alpha_j)} z_j^{\alpha_j - 1} \exp\{-z_j/\beta_j\} dz_j \end{aligned} \tag{5}$$

Die Berechnung der einzelnen Integrale in (5) ergibt:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\beta_j^{\alpha_j}} \exp\{z_j\mu_j(t-1)\} z_j^{\alpha_j-1} \exp\{z_j/\beta_j\} dz_j = \left(\frac{1-\delta_j}{1-\delta_j t}\right)^{\alpha_j}$$

$$\delta_j = \beta_j\mu_j/(1+\beta_j\mu_j). \tag{6}$$

Es gilt also $g_N(t) = \Pi_{j=1}^m \left(\frac{1-\delta_j}{1-\delta_j t}\right)^{\alpha_j}$.

(b) Ermittlung der erzeugenden Funktion für $L = \sum_{i=1}^n X_i v_i L_0$.

Verlust bedingt durch Zahlungsunfähigkeit von Kreditnehmer i:

$L_i|Z = v_i(X_i|Z)$; $L_i|Z$ unabhängig für $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$g_{L_i|Z}(t) = E(t^{L_i}|Z) = E(t^{v_i X_i}|Z) = g_{X_i|Z}(t^{v_i}).$$

Die erzeugende Funktion der Gesamtverlustverteilung bedingt durch Z:

$$g_{L|Z}(t) = g_{L_1+L_2+\ldots+L_n|Z}(t) = \Pi_{i=1}^n g_{L_i|Z}(t) = \Pi_{i=1}^n g_{X_i|Z}(t^{v_i}) =$$

$$\exp\left\{\sum_{j=1}^m Z_j \left(\sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i a_{ij}(t^{v_i}-1)\right)\right\}.$$

Ähnlich wie bei der Berechnung von $g_N(t)$ erhalten wir:

$$g_L(t) = \Pi_{j=1}^m \left(\frac{1-\delta_j}{1-\delta_j \Lambda_j(t)} \right)^{\alpha_j} \text{ wobei } \Lambda_j(t) = \frac{1}{\mu_j} \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i a_{ij} t^{v_i}.$$

δ_j und μ_j sind wie in (6) bzw. (4) gegeben.

Beispiel 5 *Kreditportfolio mit $n = 100$ Krediten, Anzahl der Risikofaktoren $m = 1$ oder $m = 5$, $\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda} = 0.15$, für $i = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha_j = \alpha = 1$, $\beta_j = \beta = 1$, $a_{j,r} = 1/m$, $j, r = 1, 2, \ldots, m$*

$$P(N = k) = \frac{1}{k!} g_N^{(k)}(0) = \frac{1}{k!} \frac{d^k g_N}{dt^k}.$$

Für die Berechnung von $P(N = k)$, $k = 0, 1, \ldots, 100$, kann folgende rekursive Formel verwendet werden:

$$g_N^{(k)}(0) = \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} g_N^{(k-1-l)}(0) \sum_{j=1}^m l! \alpha_j \delta_j^{l+1}, \;\; k > 1$$

Operationelles Risiko (OR)

"Operational risk is defined as the risk of loss resulting from inadequate or failed internal processes, people and systems or from external events. This definition includes legal risk but excludes strategic and reputational risk." - Zitat Basler Ausschuss über Bankenaufsicht (siehe Basel 2004)

Beim OR werden Verluste zB. durch Betrug, IT-Störungen, Naturkatastrophen, Terrorismus, aber nicht Verluste durch falsche Management Entscheidungen (Fusionen, Übernahmen, udgl.) berücksichtigt.

Hauptunterschied zwischen Markt- bzw. Kreditrisiko und operationelles Risiko: OR kann keine positive Auswirkungen für eine Bank haben.

Basel II: Eigenmittel Unterlegung, bankenaufsichtlicher Überwachungsprozess, erweiterte Offenlegung.

Großes Problem sind die fehlenden Daten.

Datenbanken:

- QIS - Quantitaive Impact Studies des Basler Komitees
- Federal Reserve Bank of Boston
- Private Firmen.

Grundlegende Verfahren des OR Managements

- Basisindikator Ansatz - BIA (Basic Indicator Approach)

$$RC_{BI}^{(t)}(OR) = \frac{1}{Z_t} \sum_{i=1}^{3} \alpha \max(GI^{(t-i)}, 0) \text{ wobei } Z_t = \sum_{i=1}^{3} I_{\{GI^{t-i}>0\}}.$$

GI^{t-i} - Brutto Einkommen im Jahr $t-i$
$RC_{BI}^{(t)}(OR)$ - Sicherheitskapital zur Zwecke des OR-Management im Jahr t basierend auf den BIA.

Basel II Vorschlag: $\alpha = 0,15$.

- Standartisierter Ansatz - SA (Standardized Approach)

$$RC_{SA}^{(t)}(OR) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \max(\sum_{j=1}^{8} \beta_j GI_j^{(t-i)}, 0)$$

j - Index des Geschäftsbereiches
GI_j^{t-i} - Brutto Einkommen im Jahr $t-i$ im Geschäftsbereich j
$RC_{BI}^{(t)}(OR)$ - Sicherheitskapital zur Zwecke des OR-Management im Jahr t basierend auf den BIA.

j	Geschäftsbereich	β_j (in %)
1	Corporate Finance	18
2	Trading and Sales	18
3	Retail banking	12
4	Commercial banking	15
5	payment and settlement	18
6	agency services	15
7	asset management	12
8	retail brokerage	18

- Quantifizierungsansätze - AMA (Advanced Measurement Approach)

Das Sicherheitskapital wird von der Bankselbst definiert. Das Verfahren unterliegt der Überprüfung bzw. Zustimmung der nationalen Aufsichtsbehörde.

8 Geschäftsbereiche (wie oben), 7 Typen von Verlust-Ereignissen:

1. interner Betrug
2. externer Betrug
3. Beschäftigungsverfahren und Arbeitsplatzsicherheit
4. Kunden-, Produkt- und Geschäftsverfahren
5. Beschädigung der “physical assets”
6. Unterbrechung der geschäftlichen Handlungen und Systemstörungen
7. Abwicklungs-, Lieferungs- und Prozessmanagement

Grundlegendes Schema eines generischen AMA Modells

Datenbank mit folgender Struktur:

$$\left\{X_k^{t-i,b,l}: i=1,2,\ldots,T; b=1,2,\ldots,8; l=1,2,\ldots,7; k=1,2,\ldots,N^{t-i,b,l}\right\}$$

$X_k^{t-i,b,l}$ - k-ter Verlust vom Typ l der Geschäftsbranche b im Jahr $t-i$

$N^{t-i,b,l}$ - Anzahl der Verluste vom Typ l in Branche b in Jahr $t-i$

$T \geq 5$ Anzahl der Jahre.

(Es werden Schwellwerte eingeführt (zB. 10.000,- Euro) und Verluste unterhalb des Schwellwertes werden vernachlässigt.)

Verlust im Jahr $t-i$ für die Branche b: $L^{t-i,b} = \sum_{l=1}^{7} \sum_{k=1}^{N^{t-i,b,l}} X_k^{t-i,b,l}$

Gesamtverlust im Jahr $t-i$: $L^{t-i} = \sum_{b=1}^{8} L^{t-i,b}$.

Ziel: Verwendung der Verlust-Daten um die Verteilung der jährlichen Verluste L^t zu schätzen und die dazugehörigen Risikomaße, zB. VaR, CVaR, zu berechnen.

Sicherheitskapital: $RC^t_{AM}(OR) = \rho_\alpha(L^t)$

wobei ρ_α das Risikomaß zum Konfidenzniveau α ist ($\alpha \in (0.99, 0.999)$).

Bei unbekannter Gesamtverteilung: $RC^t_{AM}(OR) = \sum_{b=1}^{8} \rho_\alpha(L^{t,b})$

Für $\rho_\alpha = VaR_\alpha$ kommts es auch die Evaluierung der Varianz einer ZV der Form $\sum_{i=1}^{N} X_k$ wobei

N ist eine ZV ist, die die Anzahl der Verluste beschreibt, und

X_k, $k = 1, 2, \ldots, N$ sind ZV, die eine Folge von Verlusten beschreiben.

Operationell-begründete Verluste: Datenproblematik

Es gib keine oder sehr wenige (=kurze) vertrauenswürdige öffentlich zugängliche Daten.

Zitat des Baslers Bankenaufsichtskomitees (Basel 2003):

Despite this progress, inferences based on the data should still be made with caution. ... In addition, the most recent data collection exercise provides data for only one year and, even under the best of circumstances, a one-year collection window will provide an incomplete picture of the full range of potential operational risk events, especially of rare but significant "tail events".

Allgemein akzeptierte Eigenschaften der Verlustgrößen:

- Die Verlustverteilung ist heavy tailed
- Verluste sind zufällige Ereignisse
- Die Frequenz der Verluste variiert stark im Zeitablauf

(Seihe Moscadelli 2004, Federal Reserve System 2005.)

Elemente der Versicherung-Analytik

Definition 3 *Sei $N(t)$ eine diskrete ZV, die die Anzahl der Verluste über einen gegebenen Zeitraum $[0,t]$ angibt. Seien X_1, X_2, ..., die einzelnen Verluste.*
Der Gesamtverlust (oder der aggregierte Verlust) ist $S_{N(t)} = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$.
Die Gesamtverteilungsfunktion $F_{S_{N(t)}}(x) = P(S_{N(t)} \leq x)$.
Für ein fixes t (zB. $t = 1$) wird der Zeit-Index vernachlässigt:
$S_N := S_{N(t)}$, $F_{S_N} := F_{S_{N(t)}}$.

Definition 4 *Seien X_k, $k = 1, 2, \ldots$, i.i.d. mit gemeinsamer Verteilungsfunktion G, $G(0) = 0$. Weiters seien X_k, $k = 1, 2, \ldots$, und N unabhängig. Die ZV S_N heißt in diesem Fall zusammengesetzte Summe. Die ZV N heißt zusammensetzende Variable.*
Notation: $P(N = k) = p_N(k)$.

Verteilungsfunktion der zusammengesetzten Summe:

$$F_{S_N}(x) = P(S_N \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) G^{(k)}(x)$$

wobei
$G^{(k)}(x) = P(S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k \leq x)$ die k-te Faltung von G ist.
Hier gilt $G^{(0)}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

Für die Laplace-Stieltjes Transformation $\widehat{F_{S_N}}$ der zusammengesetzten Summe S_N gilt:

$$\widehat{F_{S_N}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k)\widehat{G^{(k)}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k)\widehat{G}^k(s) = \mathsf{pgf}_N(\widehat{G}(s))$$

wobei pgf_N die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von N ist.

Beispiel 6 *(Die zusammengesetzte Poisson Verteilung)*
Sei $N \sim Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$. D.h. $p_N(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2 \ldots, n, \ldots,$.

Für $s \in \mathbb{R}$ gilt pgf$_N(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}s^k = \exp\{-\lambda(1-s)\}$.

Für $s \geq 0$ gilt $\widehat{F_{S_N}}(s) = \exp\{-\lambda(1-\widehat{G}(s))\}$.

Notation $S_N \sim CPoi(\lambda, G)$.

Wenn die höheren Momente existieren und $\widehat{G}$ und pgf_N differenzierbar sind, dann gilt:

$$\frac{d^k}{ds^k}\mathsf{pgf}_N(s)\,|_{s=1} = E(N(N-1)\ldots(N-k+1)) \text{ und}$$

$$(-1)^k \frac{d^k}{ds^k}\widehat{G}(s)\,|_{s=0} = E(X_1^k) =: \mu_k$$

Folgerung Beispiel 6: Für $S_N \sim CPoi(\lambda, G)$ gilt:

$$E(S_n) = (-1)\frac{d\widehat{F}_{S_N}(s)}{ds}|_{s=0} = \exp\{-\lambda[1-\widehat{G}(0)]\}\lambda(-\widehat{G}'(0)) = E(N)E(X_1)$$

Analog: $var(S_N) = \lambda E(X_1^2)$.

Theorem 1 *(Die Momente einer zusammengesetzten Verteilung)*

Für die zusammengesetzte Summe aus Definition 4 mit $E(N) \leq \infty$ und $E(X_1^2) \leq \infty$ gilt:

$E(S_N) = E(N)E(X_1)$ *und* $var(S_N) = var(N)(E(X_1))^2 + E(N)var(X_1)$

Die Poisson Verteilung als Modell der Verlustehäufigkeit

N – Anzahl der im Intervall $[0, 1]$ eingetreten Verluste.

Annahme 1: In jedem Intervall $[(k-1)/n, k/n]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, gibt es einen Verlust mit Wahrscheinlichkeit p_n.

Annahme 2: Der Eintritt eines Verlustes in einem Intervall ist unabhängig vom Eintritt der Verluste in anderen Intervallen.

Annahme 3: $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$.

N_n – Gesamtanzahl der Verluste im Intervall $[0, 1]$:
$P(N_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Es gilt dann $\lim_{n\to\infty} P(N_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, für $k = 0, 1, \ldots,$.

Das heißt $N \approx N_\infty \sim Poi(\lambda)$.

Theorem 2 *(Summe von Zusammengesetzten Poisson ZV)*

Sei $S_{N_i} \sim CPoi(\lambda_i, G_i)$, $i = 1, 2, \ldots, d.$ *und* S_{N_i} *sind unabhängig. Dann gilt* $S_N = \sum_{i=1}^{d} S_{N_i} \sim CPoi(\lambda, G)$ *wobei* $\lambda = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i$ *und* $G = \sum_{i=1}^{d} (\lambda_i/\lambda) G_i$.

Simulation solcher Verluste: Simuliere eine Zahl i aus $\{1, 2, \ldots, d\}$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{d} \lambda_i}$ und dann simuliere aus der Verteilung G_i.

Approximation und Panjer Rekursion

Für gegebene λ und G kann S_N leicht simuliert werden. Wiederholte Simulation führt zu einer empirischen Verteilung, die als Basis für die Approximation der echten Verteilung mit Hilfe einer analytisch gegebenen Verteilung verwendet wird.

Normale Approximation

Sei $S_N \sim Cpoi(\lambda, G)$ sodass $E(N) < \infty$, $G(0) = 0$ und $\int_0^\infty x^2 dG(x) < \infty$.

Durch die Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes und unter Anwendung von Satz 1 kann F_{S_N} mit Hilfe der Normalverteilung approximiert werden (siehe Embrechts et al. (1997), Satz 2.5.16):

$$F_{S_N}(x) \approx \Phi\left(\frac{x - E(N)E(X_1}{\sqrt{var(N)(E(X_1))^2 + E(N)var(X_1)}}\right)$$

wobei Φ die standard Normalverteilungsfunktion ist.

Für $S_N \sim Poi(\lambda, G)$ ist die Schiefe folgendermaßen gegeben:

$$v(S_N) = \frac{E[S_N - E(S_N)]^3}{var(S_N)^{3/2}} = \frac{E(X_1^3)}{\sqrt{\lambda E(X_1^2)^3}} > 0$$

Suche eine Approximation mit Hilfe einer rechtsschiefen Verteilung!

Approximation durch eine verschobene Gamma Verteilung

$S_N \approx k + Y$ wobei k ein Translation-Parameter ist und $Y \sim \gamma(\alpha, \beta)$.

k, α und β werden bestimmt in dem der Erwartungswert, die Varianz und die Schiefe von S_N mit den dazugehörigen Statistiken von $k + Y$ gleichgesetzt werden.

Im Falle von $N \sim Poi(\lambda)$ gilt:

$$k + \frac{\alpha}{\beta} = \lambda E(X_1),\ \frac{\alpha}{\beta^2} = \lambda E(X_1^2),\ \frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \frac{E(X_1^3)}{\sqrt{\lambda (E(X_1^2))^3}}$$

Monte Carlo Simulation

Wenn die Daten einer CPoi Verteilung auf einer sehr heavy-tailed Verteilung hindeuten, dann könnte eine Approximation mit der GPD Verteilung im Bereich der höheren Quantilen bessere Ergebnisse liefern.

Siehe Frachot (2004) und Moscadelli (2004)

Die Rekursionen von Panjer

Annahme: X_1 hat eine diskrete Verteilung mit Werten $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ und $g_k = P(X_1 = k)$. Sei (einfachheitshalber) $g_0 = 0$.

Weiters sei $p_k = p_N(k) = P(N = k)$, $s_k = P(S_N = k)$ und $g_k^{(n)} = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n = k)$.

Es gilt $g_k^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{k-1} g_i^{(n)} g_{k-i}$ für $k \geq 2$ und $n \geq 1$.

Daraus folgt:

$$s_0 = P(S_N = 0) = P(N = 0) = p_0$$

$$s_n = P(S_N = n) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k g_n^{(k)} \text{ für } \; n \geq 1$$

Definition 5 *(Panjer'sche Klasse)*

Das Wahrscheinlichkeitsmaß (p_k) von N gehört zur Panjer'schen Klasse Panjer(a,b) für $a, b \in \mathbb{R}$ wenn $p_r = (a + (b/r))p_{r-1}$ für $r \geq 1$.

Beispiele: $B(n,p)$, $Poi(\lambda)$, $NB(\alpha,p)$.

Abgesehen von degenerierten Wahrscheinlichkeitsmaßen sind diese die einzigen diskreten Verteilungen, die einer Panjer'schen Klasse gehören, siehe Kotz (1969), Sundt und Jewell (1982).

Theorem 3 *(Panjer'sche Rekursion)*

Wenn N der Panjer'schen Klasse $Panjer(a, b)$ gehört und $g_0 = P(X_1 = 0) = 0$, dann gilt

$$s_r = \begin{cases} p_0 & r = 0 \\ \sum_{i=1}^{r}(a + (bi/r))g_i s_{r-i} & r \geq 1 \end{cases}$$

Falls $g_0 = P(X_1 = 0) > 0$ gilt

$$s_r = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} p_k g_0^{(k)} & r = 0 \\ (1 - ag_0)^{-1} \sum_{i=1}^{r}(a + bi/r)g_i s_{r-i} & r \geq 1 \end{cases}$$

Beispiel 7 *Panjer'sche Rekursion für $CPoi(100, LN(1, 1))$*
Bild 10.5: Um den 99.9% Quantil ist die Approximation mit Hilfe der Panjer'sche Rekursion ausgezeichnet. Weiter in den Tail nehmen Rundungfehler die Oberhand.

Die gemischte Poisson Verteilung

Für $N \sim Poi(\lambda)$ gilt $E(N) = \lambda = var(N)$. Oft gilt $var(N) > E(N)$ für die Anzahl der Verluste N (*Overdispersion*), was nicht modellierbar mit $N \sim Poi(\lambda)$ ist.

Definition 6 *Eine ZV N mit Verteilungsfunktion*

$$p_N(k) = P(N = k) = \int_0^\infty P(N = k|\Lambda = \lambda) dF_\Lambda(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} dF_\Lambda(\lambda).$$

heißt gemischte Poisson ZV mit Struktur-Verteilungsfunktion F_Λ.

Λ könnte zB. eine Gammaverteilung oder eine log-Normalverteilung sein.

Theorem 4 *Sei N eine gemischte Poisson ZV mit Struktur-Verteilungsfunktion F_Λ. Dann gilt $E(N) = E(\Lambda)$ und $var(N) = E(\Lambda) + var(\Lambda)$. D.h. für nicht-degenerierte Λ besitzt N eine Overdispersion.*

Theorem 5 *(Die Negative Binomial (NB) Verteilung als gemischte Poisson Verteilung)*

Sei N eine gemischte Poisson ZV mit Struktur-Verteilungsfunktion $\Lambda \sim \gamma(\alpha, \beta)$. Dann hat N eine Negative Binomial Verteilung: $N \sim NB(\alpha, \beta/(\beta + 1))$.

Tail von aggregierten Verlustverteilungen

Theorem 6 *(Reguläre Variation der zusammengesetzten Summen-Verteilungen) Sei die ZV S_N eine zusammengesetzte Summe. Wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $\sum_{k=0}^{\infty}(1+\epsilon)^k p_N(k) < \infty$ und $\bar{G}(x) = x^{-\alpha}L(x)$, wobei $\alpha > 0$ und $L(x)$ eine langsam variierende Funktion ist, dann gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}_{S_n}(x)}{\bar{G}(x)} = \lambda,$$

d.h. F_{S_N} und G haben dasselbe Tail-Verhalten.

Beweis in Embrechts et al. (1997).

Beispiel 8 *Die zusammengestzte Summe S_N für eine gemischte Poisson Verteilung N heißt eine zusammengestezte gemischte Poisson Summe.*

Wenn N eine negative Binomialverteilung $NB(\alpha, \beta/(1+\beta)$, d.h. N ist eine gemischte Poisson Verteilung mit Struktur-Verteilungsfunktion $\gamma(\alpha, \beta)$, dann sind die Bedingungen von Satz (6) erfüllt und S_N besitzt sowie $NB(\alpha, \beta/(1+\beta)$ eine reguläre Variation.