Copulas: Weitere Eigenschaften

Definition 18 *(Kugel-Symmetrie)*
Ein Zufallsvektor X (oder eine Verteilungsfunktion) heisst kugel-symmetrisch um den Punkt a wenn $X - a \stackrel{d}{=} a - X$.

Beispiel: Ein elliptisch Verteilter Zufallsvektor $X \sim E_d(\mu, \boldsymbol{\Sigma}, \psi) \in \mathbb{R}^d$ ist kugel-symmetrisch um μ.

Definition 19 *(Radiale Symmetrie)*
Eine Copula C heißt radial symmetrisch wenn

$$(U_1 - 0.5, \ldots, U_d - 0.5) \stackrel{d}{=} (0.5 - U_1, \ldots, 0.5 - U_d) \Longleftrightarrow U \stackrel{d}{=} 1 - U,$$

wobei $(U_1, U_2, \ldots, U_d)$ ein Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion C ist.

Für eine radial symmetrische Copula gilt $C = \widehat{C}$.

Beispiel: Elliptische Copulas sind radial symmetrisch.
Die Gumbel und Clayton Copulas sind es nicht. Überzeugen Sie sich!

Definition 20 *(Bedingte Copula Verteilungen)*
Sei C eine zwei dimensionale Copula und (U_1, U_2) ein Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion C.

$$C_{U_2|U_1}(u_2|u_1) = P(U_2 \leq u_2|U_1 = u_1) = \lim_{\delta \to 0^+} P(U_2 \leq u_2|u_1 \leq U_1 \leq u_1 + \delta)$$

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{C(u_1 + \delta, u_2) - C(u_1, u_2)}{\delta} \overset{a.s.}{=} \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1}$$

$C_{U_2|U_1}$ ist eine Verteilung in $[0, 1]$; die ist eine Gleichverteilung d.u.n.d. wenn C die Unabhängigkeitscopula ist (siehe Nelsen 1999).

Die Dichtefunktion einer Copula

Copulas haben nicht immer eine Dichtefunktion. Z.B. die Co-Monotonie Copula M bzw. die Anti-Monotonie Copula W haben keine Dichtefunktion.

Wenn die Dichtefunktion c einer Copula C existiert dann gilt

$$c(u_1, u_2, \ldots, u_d) = \frac{\partial C(u_1, u_2, \ldots, u_d)}{\partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_d}$$

Sei C die Copula einer Gesamtverteilung F mit stetigen Randverteilungsfunktionen F_1,...,F_d. Dann kann die Gleichung

$$C(u_1, \ldots, u_d) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \ldots, F_d^{\leftarrow}(u_d))$$

differenziert werden um die Dichte c von C zu erhalten:

$$c(u_1, \ldots, u_d) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_d^{-1}(u_d))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) \ldots f_d(F_d^{-1}(u_d))}$$

f ist die Gesamtdichtefunktion, f_i sind die Dichtefunktionen der Randverteilungen, $1 \leq i \leq d$, und F_i^{-1} ist die inverse Funktion von F_i.

Definition 21 *Ein Zufallsvektor X heißt vertauschbar ("exchangeable") wenn $(X_1, \ldots, X_d) \stackrel{d}{=} (X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(d)})$ für jede Permutation $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(d))$ von $(1, 2, \ldots, d)$.*

Definition 22 *Eine Copula C heißt vertauschbar wenn sie die Gesamtverteilung eines vertauschbaren Zufallsvektors (mit Gleichverteilungen als Randverteilungen) ist.*

Für eine solche Copula gilt:

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_d) = C(u_{\pi(1)}, u_{\pi(2)}, \ldots, u_{\pi(d)}).$$

Beispiele von vertauschbaren Copulas: Gumbel, Clayton, Gauss'sche Copula C_P^{Ga}, t-Copula $C_{\nu,P}^t$ für den Fall, dass P eine Equikorrelationsmatrix ist: $R = \rho J_d + (1-\rho) I_d$. $J_d \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ist eine Matrix bestehend aus lauter Einser, und $I_d \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ist die d-dimensionale Einheitsmatrix.

Für bivariate vertauschbare Copulas gilt:

$$P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) = P(U_1 \leq u_2 | U_2 = u_1).$$

Theorem 17 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein normalverteilter Zufallsvektor. Dann gilt: $\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 0$.*

Korollar 2 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer Gauss'schen Copula C_ρ^{Ga}, wobei ρ der Koeffizient der linearen Korrelation zwischen X_1 und X_2 ist. Dann gilt: $\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 0$.*

Theorem 18 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein t-verteilter Zufallsvektor mit ν Freiheitsgraden, Mittelwert 0 und linearer Korrelationsmatrix R: $(X_1, X_2)^T \sim t_2(0, \nu, R)$. Für $R_{12} > -1$ gilt:*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 2\bar{t}_{\nu+1}\left(\sqrt{\nu+1}\frac{\sqrt{1-R_{12}}}{\sqrt{1+R_{12}}}\right)$$

Beweis: Ähnlich wie der Beweis von Satz 17. Hinweis:

$$X_2 | X_1 = x \sim \left(\frac{\nu+1}{\nu+x^2}\right)^{1/2} \frac{X_2 - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} \sim t_{\nu+1}$$

.

Korollar 3 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer* t*-copula* $C^t_{\nu,R}$ *mit* ν *Freiheitsgraden und einer Korrelationsmatrix* R*. Dann gilt:*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 2\bar{t}_{\nu+1}\left(\sqrt{\nu+1}\frac{\sqrt{1-R_{12}}}{\sqrt{1+R_{12}}}\right)$$

Theorem 19 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer Gauss'schen copula* C^{Ga}_{ρ}*, wobei* ρ *der Koeffizient der linearen Korrelation zwischen* X_1 *und* X_2 *ist. Dann gilt:*

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi}\arcsin R_{12} \text{ und } \rho_S(X_1, X_2) = \frac{6}{\pi}\arcsin\frac{R_{ij}}{2}$$

Theorem 20 *Sei* $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ *ein elliptisch verteilter Vektor mit stetigen Randverteilungsfunktionen. Dann gilt:*

$$\rho_\tau(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi}\arcsin R_{ij}, \text{ wobei } R_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}} \text{ für } i, j = 1, 2, \ldots, d$$

Korollar 4 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer elliptischen copula* $C^E_{\mu,\Sigma,\psi}$*. Dann gilt:*

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi}\arcsin R_{12}, \text{ wobei } R_{12} = \frac{\Sigma_{12}}{\sqrt{\Sigma_{11}\Sigma_{22}}}$$

Beweise von Satz 19, Satz 20 und Korollar 4: siehe McNeil et al. (2005).

Archimedische Copulas

Nachteile elliptischer Copulas:

- I.A. keine Darstellung in geschloßener Form möglich
- kugel-symmetrisch

Bivariate Archimedische Copulas

Definition 23 *Sei* $\phi\colon [0,1] \to [0,+\infty]$ *stetig, streng monoton fallend, sodass* $\phi(1) = 0$*. Die pseudo-inverse Funktion* $\phi^{[-1]}\colon [0,\infty] \to [0,1]$ *von* ϕ *wird folgendermassen definiert:*

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t) & 0 \le t \le \phi(0) \\ 0 & \phi(0) \le t \le \infty \end{cases}$$

$\phi^{[-1]}$ ist stetig und monoton fallend in $[0,\infty]$, streng monoton fallend in $[0,\phi(0)]$ und es gilt:

$$\phi^{[-1]}(\phi(u)) = u \text{ für } u \in [0,1]$$

$$\phi(\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le \phi(0) \\ \phi(0) & \phi(0) \le t \le +\infty \end{cases}$$

Falls $\phi(0) = +\infty$, dann $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$.

Theorem 21 *Sei $\phi\colon [0,1] \to [0,+\infty]$ stetig, streng monoton fallend in $[0,1]$, sodass $\phi(1) = 0$, und sei $\phi^{[-1]}$ die pseudo-inverse Funktion von ϕ. Sei $C\colon [0,1]^2 \to [0,1]$, sodass $C(u_1,u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$. C ist eine Copula dann und nur dann wenn ϕ convex ist. Copula dieser Form heißen Archimedische Copulas. ϕ heißt Generator von C. Falls $\phi(0) = +\infty$, dann $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$ und $C(u_1,u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$.*

Beweis: Siehe Nelsen 1999.

Beispiel 16 *Gumbel Copulas*
Sei $\phi(t) = (-\ln t)^\theta$, $\theta \geq 1$, $t \in [0,1]$.

$$C_\theta^{Gu}(u_1,u_2) = \exp\left(-[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta]^{1/\theta}\right) \text{ ist die Gumbel}$$

Copula mit Parameter θ.

Für $\theta = 1$: $C_1^{Gu} = u_1 u_2$.
$\lim_{\theta\to\infty} C_\theta^{Gu} = M(u_1,u_2) = \min\{u_1,u_2\}$.

Die Gumbel Copulas haben eine obere Tail Abhängigkeit.

Beispiel 17 *Clayton Copulas*
Sei $\phi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$, $\theta > 0$.

$$C_\theta^{Cl}(u_1,u_2) = \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1\right)^{-1/\theta} \text{ ist die Clayton Copula mit Parameter } \theta.$$

$\lim_{\theta\to 0} C_\theta^{Cl} = u_1 u_2$ *und* $\lim_{\theta\to\infty} C_\theta^{Cl} = M = \min\{u_1,u_2\}$.

Die Clayton Copulas haben eine untere Tail Abhängigkeit

Beispiel 18 $\phi(t) = 1 - t$, $t \in [0,1]$. $\phi^{[-1]}(t) = \max\{1 - t, 0\}$.
$C_\phi(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\} = W(u_1, u_2)$.

D.h. die untere Fréchet Schranke ist eine Archimedische Copula.

Theorem 22 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer Archimedischen Copula C generiert von ϕ. Dann gilt $\rho_\tau(X_1, X_2) = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}dt$.*

Beweis: Siehe Nelsen 1999.

Beispiel 19 *Kendalls Tau für Gumbel und Clayton Copulas*

Gumbel Copulas: $\phi(t) = (\ln t)^\theta$, $\theta \geq 1$.
$\rho_\tau(\theta) = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}dt = 1 - \frac{1}{\theta}$.

Clayton Copulas: $\phi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$, $\theta > 0$.
$\rho_\tau(\theta) = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}dt = \frac{\theta}{\theta+2}$.

Multivariate Archimedische Copulas

Definition 24 *Eine Funktion* $g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *heißt vollständig monoton wenn* g *stetig ist und folgende Ungleichung für* $k = 0,1,2,\ldots$ *gilt:*

$$(-1)^k \left(\frac{d^k}{ds^k} g(s)\right)\Bigg|_{s=t} \geq 0, \forall t \in (0,\infty)$$

Theorem 23 *(Kimberling 1974)*
Sei $\phi\colon [0,1] \to [0,\infty]$ *eine stetige und streng monoton fallende Funktion, sodass* $\phi(0) = \infty$ *und* $\phi(1) = 0$. *Die Funktion* $C\colon [0,1]^d \to [0,1]$, $C(u) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2) + \ldots + \phi(u_d))$ *ist eine Copula für* $d \geq 2$ *dann und nur dann wenn* ϕ^{-1} *vollständig monoton in* $[0,\infty)$ *ist.*

Lemma 6 *Eine Funktion* $\psi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *ist die Laplace-Stieltjes Transformation einer Verteilungsfunktion* G *in* $[0,\infty)$ $(\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x)$, $s \geq 0)$ *dann und nur dann wenn* ψ *vollständig monoton und* $\psi(0) = 1$.

Theorem 24 *(LT-Archimedische Copulas)*
Sei G eine Verteilungsfunktion in $[0,\infty)$, sodass $G(0) = 0$ und sei ψ die Laplace-Stieltjes Transformation von G

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x), \text{ für } s \geq 0.$$

Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion G und seien $U_1, U_2, \ldots, U_d$ bedingt unabhängige Zufallsvariablen in $[0,1]$ für ein gegebenes $X = x$ mit folgender bedingter Verteilungsfunktion:

$$F_{U_k|X=x}(u) = \exp(-x\psi^{-1}(u)) \text{ für } u \in [0,1].$$

Es gilt dann

$$P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \ldots, U_d \leq u_d) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \psi^{-1}(u_2) + \ldots + \psi^{-1}(u_d)).$$

und die Verteilungsfunktion von $U = (U_1, U_2, \ldots, U_d)$ ist eine Archimedische Copula mit Generator ψ^{-1}.

Vorteile und Nachteile Archimedischer Copulas:

- Modellierung einer breiteren Klasse von Abhängigkeitsstrukturen
- Darstellung in geschloßener Form möglich
- Wenige freie Parameter vorhanden
- Technische Voraussetzungen für die Generator Funktionen multivariater Archimedische Copulas.

Simulation von Gauss'schen Copulas und t-Copulas

Sei $R \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine positiv definite Matrix. Sei $AA^T = R$ die Cholesky Zerlegung von R ($A \in \mathbb{R}^{d\times d}$). Falls $Z_1, Z_2, \ldots, Z_d \sim N(0,1)$ unabhängig dann gilt $\mu + AZ \sim N_d(\mu, R)$.

Algorithmus 1 *zur Erzeugung eines Zufallsvektors $U = (U_1, U_2, \ldots, U_d)$ dessen Verteilungsfunktion die Copula C_R^{Ga} ist.*

- *Berechne die Cholesly Zerlegung A von R: $R = AA^T$.*
- *Simuliere d unabhängige standard normal verteilte ZV $Z_1, Z_2, \ldots, Z_d \sim N(0,1)$*
- *Setze $X = AZ$*
- *Setze $U_k = \phi(X_k)$ für $k = 1, 2, \ldots, d$, wobei ϕ die Verteilungsfunktion der standard Normalverteilung ist.*
- *$U = (U_1, U_2, \ldots, U_d)$ hat Verteilungsfunktion C_R^{Ga}.*

Algorithmus 2 *zur Erzeugung eines Zufallsvektors* $U = (U_1, U_2, \ldots, U_d)$ *dessen Verteilungsfunktion die Copula* $C^t_{\nu,R}$ *ist.*

- *Berechne die Cholesly Zerlegung* A *von* R*:* $R = AA^T$*.*
- *Simuliere* d *unabhängige standard normal verteilte ZV* $Z_1, Z_2, \ldots, Z_d \sim N(0, 1)$
- *Simuliere eine ZV* $S \sim \chi^2_\nu$ *unabhängig von* $Z_1, \ldots, Z_d$*.*
- *Setze* $Y = AZ$
- *Setze* $X = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}} Y$
- *Setze* $U_k = t_\nu(X_k)$ *für* $k = 1, 2, \ldots, d$*, wobei* t_ν *die Verteilungsfunktion einer standard* t*-Verteilung mit* ν *Freiheitsgraden ist.*
- $U = (U_1, U_2, \ldots, U_d)$ *hat Verteilungsfunktion* $C^t_{\nu,R}$*.*

Simulationen der Gumbel und Clayton Copulas
Aus dem Satz über die LT Archimedischen Copulas lässt sich ein Algorithmus zur Erzeugung dieser Copulas konstruieren.

Algorithmus 3 *zur Erzeugung eines Zufallsvektors* $U = (U_1, U_2, \ldots, U_d)$ *dessen Verteilungsfunktion die Archimedische Copula* $C(u) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2) + \ldots + \phi(u_d))$ *mit Generator* ϕ *ist.*

- *Simuliere eine Variable* X *mit Verteilungsfunktion* G*, sodass die Laplace Transformation* ψ *von* G *die inverse Funktion des Generators der gesuchten Copula ist,* $\psi = \phi^{-1}$*.*

- *Simuliere unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen* V_1,V_2,..., V_d *in* $[0, 1]$*.*

- *Setze* $U = (\psi(-\ln(V_1)/X), \psi(-\ln(V_2)/X), \ldots, \psi(-\ln(V_d)/X))$*.* U *hat Verteilungsfunktion* $C(u)$*.*

Der Generator $\phi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$, $\theta > 0$ erzeugt die Clayton Copula C_θ^{Cl}. Aber auch $\tilde{\phi}(t) = t^{-\theta} - 1$ ist ein Generator der Clayton Copula.

Für $X \sim Gamma(1/\theta, 1)$ d.h. $f_X(x) = x^{1/\theta-1}e^{-x}/\Gamma(1/\theta)$ gilt:

$$E(e^{-sX}) = \int_0^\infty e^{-sx}\frac{1}{\Gamma(1/\theta)}x^{1/\theta-1}e^{-x}dx = (s+1)^{-1/\theta} = \tilde{\phi}^{-1}(s).$$

Algorithmus 4 *zur Erzeugung eines Zufallsvektors* $U = (U_1, U_2, \ldots, U_d)$ *dessen Verteilungsfunktion die Clayton Copula* C_θ^{Cl} *ist.*

- *Simuliere* $X \sim Gamma(1/\theta, 1)$.
- *Simuliere unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen* V_1,V_2,..., V_d *in* $[0, 1]$.
- *die Verteilungsfunktion des Vektors*

  $$U = (\psi(-\ln(V_1)/X), \psi(-\ln(V_2)/X), \ldots, \psi(-\ln(V_d)/X))$$

  ist die Clayton Copula C_θ^{Cl}.

Die Simulation von Gumbel Copulas C_θ^{Gu} :

Sei X eine positive stabile ZV, $X \sim St(1/\theta, 1, \gamma, 0)$ mit $\gamma = (\cos(\pi/(2\theta)))^\theta$, $\theta > 1$.

Die Laplace-Stieltjes Transformation von F_X ist $\phi(t) = \exp(-t^{1/\theta})$.

Simulation von $Z \sim ST(\alpha, \beta, 1, 0)$: siehe Nolan 2002.

Für $\alpha \neq 1$ gilt: $X = \delta + \gamma Z \sim St(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Alternativer Ansatz:
Sei $\theta \geq 1$ und $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \exp(-x^{1/\theta})$ für $x \geq 0$.
Sei $V \sim U(0,1)$.
Sei S eine von V unabhängige ZV. mit Dichtefunktion

$$h(s) = (1 - 1/\theta + (1/\theta)s \exp(-s)$$

Sei $(Z_1, Z_2)^T = (VS^\theta, (1-V)S^\theta)$.
Die Verteilungsfunktion von $(\bar{F}(Z_1), \bar{F}(Z_2))^T$ ist C_θ^{Gu}.
Überzeugen Sie sich (Hausübung)!

Algorithmus 5 *zur Erzeugung eines Zufallsvektors $U = (U_1, U_2, \ldots, U_d)$ dessen Verteilungsfunktion die Gumbel Copula C_θ^{Cu} ist.*

- *Simuliere zwei unabhängige ZV. $V_1, V_2 \sim U(0,1)$.*
- *Simuliere zwei unabhängige ZV. $W_1 \sim \Gamma(1,1)$, $W_2 \sim \Gamma(2,1)$*
- *Setze $S = I_{V_2 \leq 1/\theta} W_1 + I_{V_2 > 1/\theta} W_2$.*
- *Setze $(Z_1, Z_2) = (V1S^\theta, (1-V_1)S^\theta)$.*
- *Die Verteilungsfunktion von $U = (\exp(-Z_1^{1/\theta}), \exp(-Z_2^{1/\theta})^T$ ist C_θ^{Gu}.*