Einführung in Copulas: Grundlegende Eigenschaften

Definition 6 *Eine d-dimensionale Copula ist eine Verteilungsfunktion in* $[0,1]^d$ *deren Randverteilungen jeweils standard gleichverteilt auf* $[0,1]$ *sind.*

Oder äquivalent:

Eine Copula C *ist eine Funktion* $C\colon [0,1]^d \to [0,1]$, *die folgende Eigenschaften hat:*

1. $C(u_1, u_2, \ldots, u_d)$ *ist mon. steigend in jeder Variable* u_i, $1 \le i \le d$.

2. $C(1, 1, \ldots, 1, u_k, 1, \ldots, 1) = u_k$ *für jedes* $k \in \{1, \ldots, d\}$, $u_k \in [0,1]$.

3. *Folgende Ungleichung (sogenannte Rechtecksungleichung) gilt für alle* $(a_1, a_2, \ldots, a_d)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_d) \in [0,1]^d$ *mit* $a_k \le b_k$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, d\}$:

$$\sum_{k_1=1}^{2} \cdots \sum_{k_d=1}^{2} (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_d} C(u_{1k_1}, u_{2k_2}, \ldots, u_{dk_d}) \ge 0$$

   wobei $u_{j1} = a_j$ *und* $u_{j2} = b_j$.

Anmerkung: Für $2 \le k \le d$ sind die k-dimensionalen Randverteilungen einer d-dimensionalen Copula wieder Copulas, k-dimensionale Copulas.

Definition 7 *Sei $h\colon R \to R$ eine monoton steigende Funktion. Die verallgemeinerte inverse Funktion $h^{\leftarrow}\colon \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ wird folgendermaßen definiert:*

$$h^{\leftarrow}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R}\colon f(x) \geq q\}$$

Hierbei gilt $\inf \emptyset = \infty$. *Falls h monoton steigend und $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, dann gilt $h^{-1} = h^{\leftarrow}$.*

Lemma 1 *Sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion und $h^{\leftarrow}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die verallgemeinerte inverse Funktion von h. Es gelten dann folgende Aussagen:*

1. *h ist stetig $\Longleftrightarrow$ $h^{\leftarrow}$ ist streng monoton steigend.*

2. *h ist streng monoton steigend $\Longleftrightarrow$ $h^{\leftarrow}$ ist stetig.*

3. *$h^{\leftarrow}(h(x)) \leq x$*

4. *h ist streng monoton steigend $\Longrightarrow$ $h^{\leftarrow}(h(x)) = x$.*

5. *h ist stetig $\Longrightarrow$ $h(h^{\leftarrow}(y)) = y$.*

Lemma 2 *Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Es gilt: $P\left(X = x\colon F^{\leftarrow}(F(x)) = x\right) = 1$.*

Theorem 7 *Sei G eine Verteilungsfunktion in $\mathbb{R}$.*

1. *Quantil-Transformation:*
   Wenn $U \sim U(0,1)$ (standard Gleichverteilung), dann gilt $P(G^{\leftarrow}(U) \leq x) = G(x)$.

2. *Wahrscheinlichkeit-Transformation:*
   Sei Y eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion G. Es gilt $G(Y) \sim U(0,1)$.

Theorem 8 *(Sklar, 1959)*
Sei F eine Gesamtverteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen $F_1,\ldots,F_d$. Es existiert eine Copula C, sodass für alle $x_1, x_2, \ldots, x_d \in \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_d(x_d)). \tag{1}$$

Wenn $F_1,\ldots,F_d$ stetig, dann ist C eindeutig.

Vice-versa, sei C eine Copula und $F_1,\ldots,F_d$ Verteilungsfunktionen. Dann ist die Funktion F aus (1) eine Gesamtverteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen $F_1,\ldots,F_d$.

C aus (1) heißt Copula von F. Für ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ mit Gesamtverteilungsfunktion F heißt C auch Copula von X.

Korollar 1 *Sei F eine Gesamtverteilungsfunktion mit stetigen Randverteilungsfunktionen F_1,...,F_d. Die eindeutige Copula von F ist folgendermaßen gegeben:*

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_d) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), F_2^{\leftarrow}(u_2), \ldots, F_d^{\leftarrow}(u_d)).$$

Theorem 9 *Sei $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen $F_1, F_2, \ldots, F_d$ und Copula C. Seien T_1,T_2,..., T_d streng monoton steigende Funktionen. Dann ist C auch eine Copula von $(T_1(X_1), T_2(X_2), \ldots, T_d(X_d))^T$.*

Beispiel 8 *Sei $X \sim N_d(0, \Sigma)$ wobei $\Sigma = R$ die Korrelationsmatrix von X ist. Seien ϕ_R und ϕ die Verteilungsfunktionen von X bzw. X_1. Die Copula von X ist die so genannte Gauss'sche Copula C_R^{Ga}:*

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2, \ldots, u_d) = \phi_R(\phi^{-1}(u_1), \phi^{-1}(u_2), \ldots, \phi^{-1}(u_d)).$$

C_R^{Ga} ist auch die Copula jeder nicht degenerierten Normalverteilung $N_d(0, \Sigma)$ mit Korrelationsmatrix R.

Für $d = 2$ und $\rho = R_{12} \in (-1, 1)$ gilt:

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{\frac{-(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} dx_1 dx_2$$

Theorem 10 *(Fréchet Schranken)*
Für jede Copula gilt

$$\max\left\{\sum_{k=1}^{d} u_k - d + 1, 0\right\} \le C(u_1, u_2, \dots, u_d) \le \min\{u_1, u_2, \dots, u_d\}.$$

Notation: Untere Schranke =: W_d *und obere Schranke =:* M_d, *für* $d \ge 2$. *Für* $d = 2$ *setzen wir* $M := M_2$, $W := W_2$.

Anmerkung: Ein analoges Ergebnis wie im Satz 10 gilt für allgemeine multivariate Verteilungen F mit Randverteilungen F_i, $1 \le i \le d$:

$$\max\left\{\sum_{k=1}^{d} F_k(x_k) - d + 1, 0\right\} \le F(x_1, x_2, \dots, x_d) \le \min\{F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)).$$

Beispiel 9 *Zeigen Sie, dass die Fréchet untere Schranke* W_d *für* $d \ge 3$ *keine Copula ist.*
Hinweis: Verwenden Sie die Mengenfunktion Q

$$Q([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots [a_d, b_d]) = \sum_{k_1=1}^{2} \sum_{k_2=1}^{2} \dots \sum_{k_d=1}^{2} (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_d} W_d(u_{1k_1}, u_{2k_2}, \dots, u_{dk_d})$$

wobei $(a_1, a_2, \dots, a_d)$, $(b_1, b_2, \dots, b_d) \in [0,1]^d$ *mit* $a_k \le b_k$ *und* $u_{j1} = a_j$ *und* $u_{j2} = b_j$ *für* $j \in \{1, 2, \dots, d\}$.

Theorem 11 *Für jedes $d \geq 3$ und jedes $u \in [0,1]^d$, es existiert eine Copula $C_{d,u}$, sodass $C_{d,u}(u) = W_d(u)$.*

Anmerkung: Für jedes $d \geq 2$ ist die Fréchet obere Schranke M_d eine Copula.

Beispiel 10 *M und W sind Copulas.*
Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X. Seien $Y = T(X)$ und $Z = S(X)$ zwei Zufallsvariablen, wobei T und S zwei streng monotone Funktionen, T steigend und S fallend, sind. Zeigen Sie, dass M die Copula von $(X, T(X))^T$ und W die Copula von $(X, S(X))^T$ ist.

Lemma 3 *(Die Höffding'sche Gleichung)*
Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit Gesamtverteilung F und Randverteilungen F_1, F_2. Wenn $cov(X_1, X_2) < \infty$ dann gilt:

$$cov(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2))dx_1 dx_2.$$

Beweis in McNeil et al.,2005.

Co-Monotonie und Anti-Monotonie

Definition 8 *X_1 und X_2 heißen co-monoton wenn M eine Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist. X_1 und X_2 heißen anti-monoton wenn W eine Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist.*

Theorem 12 *Angenommen eine Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist W oder M.Es existieren dann zwei monotone Funktionen $\alpha, \beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Zufallsvariable Z, sodass*

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (\alpha(Z), \beta(Z)) .$$

Falls M die Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist, dann sind α und β monoton steigend , falls W die Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist, dann ist α monoton steigend und β monoton fallend. .

Wenn die Randverteilungen F_1 und F_2 von $(X_1, X_2)^T$ stetig sind, dann gilt:

$C = W \iff X_2 = T(X_1)$ *fast sicher* $, T = F_2^{\leftarrow} \circ (1 - F_1)$ *monoton fallend*

$C = M \iff X_2 = T(X_1)$ *fast sicher* $, T = F_2^{\leftarrow} \circ F_1$ *monoton steigend*

Beweis: In McNeil et al., 2005.