Risikomanagement: Hintergrund und Ziele

Beispiel 1 *Anfangskapital* $V_0 = 100$

Spiel: man verliert oder gewinnt 50 mit Wahrsch. jeweils 1/2.

Kapital nach dem Spiel $V_1 = \begin{cases} 150 & \text{mit Wahrsch. } 1/2 \\ 50 & \text{mit Wahrsch. } 1/2 \end{cases}$

Sei $X := V_1 - V_0$ der Gewinn/Verlust. Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X heißt **Gewinn/Verlust Verteilung** *(GVV)*

Die Verteilungsfunktion von $L := V_0 - V_1$ heißt **Verlustverteilung**.

$L >= 0 \Rightarrow$ Risiko!

Viele Leute hätten lieber 0 mit Sicherheit als ± 50 mit Wahrsch. von jeweils 1/2. **Risikoaversion!**

Entscheidung Spielen oder nicht spiel hängt von der Verlustverteilung ab. Diese ist aber meistens unbekannt!

Definition 1 *Ein Risikomaß ρ ist eine Abbildung der Zufallsvariablen zu den reellen Zahlen, die jeder Zufallsvariable L eine reelle Zahl $\rho(L) \in \mathbb{R}$ zuordnet.*

Bsp. Standardabweichung, Quantil der Verlustverteilung, . . .

Warum Risikomanagement

Das Volumen des risikoreichen Handels im Globalen Markt steigt kontinuierlich

Global OTC Derivatives: Tägliche Durchschnittsrendite in Billionen von USD*

Kontrakte	1995	1998	2001	2004
FOREX	45	97	67	140
Zinssätze	151	265	489	1025
Gesamt	200	375	575	1220

Beispiele grosser Verlusten in den Finanzmärkten
(Siehe `http://www.erisk.com`)

- Orange County (1994)
- Barings Bank (1995)
- LTCM (1998)
- Bankgesellschaft Berlin (2001)

*Quelle: Triennial Central Bank Survey of Foreign Exchange and Derivatives Market Activity 2004 - Preliminary global results, `http://www.erisk.com`

Regulator und Aufsichtsbehörde

Sicherheitskapital abhängig von der GVV.
Gesetzliche Bestimmungen über das Volumen des Sicherheitskapitals.
Kontrolle durch die Aufsichtsbehörde.

Basel Kommittee: Vorschläge und Richtlinien über die Anforderungen und Methoden zur Berechnung des Sicherheitskapitals

1998 1. Basel Abkommen: Internationale Mindestkapitalanforderungen insbesondere bzgl. Kreditrisiko

1996 Novelle formuliert standardisierte Modelle für Marktrisiko mit einer Option für größere Banken zur Verwendung von Value at Risk (VaR) Modellen

1994 Basel II, Mindestkapitalanforderungen (bzgl. Kredit- und Marktrisiko sowie bzgl. operationelle Risiken), aufsichtliche Überprüfungsverfahren, Marktdisziplin

Risikotypen

Für eine Organisation ist Risiko jedes Ereignis oder Tat, das/der die Organisation verhindern könnte ihre Verpflichtungen zu erfüllen bzw. ihre Strategien durchzuführen.

Finanzielles Risiko:

- Marktrisiko
- Kreditrisiko
- Operationelles Risiko
- Liquiditätsrisiko, Rechtliches Risiko, Rufschädigungsrisiko

Finanzderivate sind Finanzprodukte or Kontrakte, die aus einem fundamentalen Basiswert (zB. Aktienpreis, Aktienindex, Zinssatz, Rohstoffpreis) abgeleitet werden.

Eine *Europäische Call Option (ECO)* an einer bestimmten Aktie S gibt dem Besitzer das Recht aber nicht die Pflicht, die Aktie S an einem Tag T um einen Preis K zu kaufen. Die Option wird um einen bestimmten Preis am Tag 0 erworben.

Wert der ECOn zum Zeitpunkt t: $C(t) = \max\{S(t) - K, 0\}$,
wobei $S(t)$ der Preis der Aktie S zum Zeitpunkt t ist.

Verlustoperatoren

$V(t)$ - Wert des PF zum Zeitpunkt t

Zeithorizont Δt; Verlust: $L_{[t,t+\Delta t]} := -(V(t+\Delta t) - V(t))$

Diskretisierung der Zeit: $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$L_{n+1} := L_{[t_n,t_{n+1}]} = L_{n\Delta t,(n+1)\Delta t]} = -V((n+1)\Delta t) - V(n\Delta t) =: -(V_{n+1} - V_n)$,
wobei $V_n = V(n\Delta t)$

Beispiel 2 *Ein Aktienportfolio*

Das Portfolio besteht aus α_i Stück von Aktie A_i, $i = 1, 2, \ldots, d$. $S_{n,i}$
Preis von Aktie i zum Zeitpunkt n. $V_n = \sum i = 1^d \alpha_i S_{n,i}$

$X_{n+1,i} := \ln S_{n+1,i} - \ln S_{n,i}$, $Z_{n,i} := \ln S_{n,i}$

Seien $w_{n,i} := \alpha_i S_{n,i}/Vn$, $iu = 1, 2, \ldots, d$, die Portfoliogewichte. Es gilt

$$L_{n+1} := -\sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_{n,i}(\exp\{X_{n+1,i}\} - 1) = -V_n \sum_{i=1}^{d} w_{n,i}(\exp\{X_{n+1,i}\} - 1)$$

Linearisierung: $e^x = 1 + x + O(x^2) \sim 1 + x$

$$L^{\Delta} n + 1 = -V_n \sum_{i=1}^{d} w_{n,i} X_{n+1,i}$$

Der allgemeiner Fall

$V_n = f(t_n, Z_n)$; $Z_n = (Z_{n,1}, \ldots, Z_{n,d})$ ist ein Vektor von Risikofaktoren

Veränderungen der Risikofaktoren: $X_{n+1} = Z_{n+1} - Z_n$

$L_{n+1} = -(f(t_{n+1}, Z_n + X_{n+1}) - f(t_n, Z_n)) =: l_{[n]}(X_{n+1})$ wobei

$l_{[n]}(x) := -(f(t_{n+1}, Z_n + x) - f(t_n, Z_n))$ ist der Verlustoperator

Der linearisierter Verlust:

$L^{\Delta}_{n+1} = -(f_t(tn, Z_n)\Delta t + \sum i = 1^d f_{z_i}(t_n, Z_n) X_{n+1,i})$,

wobei f_t und f_{z_i} die partiellen Ableitungen von f sind.

Der linearisierter Verlustoperator:

$l_{[n]}(x) = -(f_t(tn, Z_n)\Delta t + \sum i = 1^d f_{z_i}(t_n, Z_n) x_i)$

Beispiel 3 *Ein Anleihen-Portfolio*

Definition 2 *Eine Nullkuponanleihe mit Laufzeit T ist ein Kontrakt, das dem Besitzer einen USD (1$) zum Zeitpunkt T bringt.*

Sei $B(t,T)$ der Preis der Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt $t < T$.

Die kontinuierliche Rendite (yield) - $y(t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t,T)$ - wird interpretiert als der kontinuierlicher Zinssatz, der zum Zeitpunkt t für den gesamtem Zeitraum $[t,T]$ vereinbart wurde.

Für unterschiedliche Laufzeiten gibt es unterschiedliche Rendite.

Renditenkurve (yield curve) zum fixen Zeitpunkt t: $T \mapsto y(t,T)$

PF besteht aus α_i Stück der Nullkuponanleihe i mit Laufzeit T_i und Preis $B(t,T_i)$, $i = 1, 2, \ldots, d$.

PF-Wert:

$V_n = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i B(t_n, T_i) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i exp\{-(T_i - t_n) Z_{n,i}\} = f(tn, Z_n)$

Risikofaktoren: $Z_{n,i} = y(t_n, T_i)$

$$l_{[n]}(x) = -\sum_{i=1}^{d} \alpha_i B(t_n, T_i)\left(exp\{Z_{n,i}\Delta t - (T_i - t_{n+1})x_i\} - 1\right)$$

$$L^{\Delta}_{n+1} = -\sum_{i=1}^{d} \alpha_i B(t_n, T_i)\left(Z_{n,i}\Delta t - (T_i - t_{n+1})X_{n+1,i}\right)$$

Beispiel 4 *Ein Währung-Forward-Portfolio*

Definition 3 *Ein Währung-Forward ist ein Kontrakt zwischen zwei Parteien um eine bestimmte Summe $\bar{V}$ einer fremden Währung zu einem bestimmten Zeitpunkt T und zu einem bestimmten Wechselkurs $\bar{e}$.*

Die Partei, die fremde Währung kauft hat eine *Long Position*. Die Partei, die verkauft hat eine *Short Position*.

Long Position in einem Währung-Forward $\Longleftrightarrow$
Long Position in einer fremden Nullkuponanleihe (NCA)
und
eine Short Position in einer einheimischen Nullkuponanleihe.

Annahmen:

Euro-Investor hält eine Long Position in ein USD/EUR Forward über $\bar{V}$ USD.

Sei $B^f(t,T)$ / $B^d(t,T)$ der Preis einer Amerikanischen/Euro-basierten NCA.

Sei $e(t)$ der Kassa Wechselkurs (spot exchange rate) für USD/EUR.

Wert der Long Position des Währung-Forwards zum Zeitpunkt T : $V_T = \bar{V}(e(T) - \bar{e})$.

Die Short Position in der einheimischen NCA kann wie im Beispiel (3) behandelt werden.

Die Long Position in der fremden NCA:

Risikofaktoren: $Z_n = (\ln e(t_n), y^f(t_n,T))^T$

Wert der Long Position: $V_n = \bar{V} \exp\{Z_{n,1} - (T - t_n)Z_{n,2}\}$

Der linearisierte Verlust: $L^{\Delta}_{n+1} = -V_n(Z_{n,2}\Delta t + X_{n+1,1} - (T - t_n)X_{n+1,2})$

Beispiel 5 *Europäische Call Option*

Europäische Call Option in einer Aktie S mit Laufzeit T und Strikepreis K.

Wert der Call Option zum Zeitpunkt T: $\max\{ST - K, 0\}$

Preis zum Zeitpunkt $t < T$: $C = C(t, S, r, \sigma)$, wobei t ist die Zeit, S ist der Preis zum Zeitpunkt t, r ist der Zinssatz, σ ist die Volatilität.

Risikofaktoren: $Z_n = (\ln S_n, r_n, \sigma_n)^T$;

$X_{n+1} = (\ln S_{n+1} - \ln S_n, r_{n+1} - r_n, \sigma_{n+1} - \sigma_n)^T$

PF-Wert: $V_n = C(t_n, S_n, r_n, \sigma)$

Der linearisierte Verlust: $L^{\Delta}_{n+1} = -(C_t \Delta t + C_S S_n X_{n+1,1} + C_r X_{n+1,2} + C_\sigma X_{n+1,3})$

The greeks: C_t - theta, C_S - delta, C_r - rho, C_σ - Vega