Name: **Matrikelnr./Kennzahl:**

Risikotheorie und -management

7. März 2008

Aufgabe:	1	2	3	4	
Punkte:	5	5	5	5	
				=	*Punkte*

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten zu begründen!

1. Seien x_1,x_2,...,x_{22}, die über die letzten 22 Monate beobachteten monatlich realisierten Verluste eines Aktienportfolios. Es wird angenommen, dass die Verlustverteilung über die letzten 22 Monate unverändert geblieben ist; X_i, $1 \leq i \leq 22$, wird als Stichprobe der unbekannten Verlustverteilung F gesehen.

   Bestimmen Sie basierend auf der obigen Stichprobe ein Konfidenzintervall (a, b) für $VaR_{0.9}(F)$ auf dem Niveau $p \geq 0.8$, d.h. für a und b müssen $P\big(VaR_{0.9}(F) < a\big) < 0.1$ und $P\big(VaR_{0.9}(F) > b\big) < 0.1$ gelten.

2. Seien $X_1 \sim Exp(1)$ und $X_2 \sim Exp(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ zwei exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Dichtefunktionen f_1 bzw. f_λ:

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

   Bestimmen Sie $\rho_{L,max}(X_1, X_2)$.

   Hinweis: Nutzen Sie den Zusammenhang zwischen der Exponentialverteilung und der stetigen Gleichverteilung: $X \sim U([0,1])$ impliziert $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln X \sim Exp\{\lambda\}$.

3. Wir betrachten eine Verteilungsfunktion $F \in MDA(H_\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, wobei H_γ die Verallgemeinerte Extremwertverteilung mit

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\big\{-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}\big\} & \text{wenn } \gamma \neq 0 \\ \exp\{-\exp\{-x\}\} & \text{wenn } \gamma = 0 \end{cases}$$

   und Definitionsbereich $\{x \in \mathbb{R} \colon 1 + \gamma x > 0\}$ ist. F wird "heavy tailed" genannt wenn $\lim_{x \to +\infty} \frac{\bar{F}(x)}{\exp\{-\lambda x\}} = \infty$ für jedes $\lambda > 0$. Diskutieren Sie in Abhängigkeit von γ ob F "heavy tailed" ist. Betrachten Sie drei Fälle: $\gamma > 0$, $\gamma < 0$ und $\gamma = 0$.

   Hinweis: Nutzen Sie die Charakterisierung von $MDA(H_\gamma)$ (Satz 15) um eine Abschätzung von $\bar{F}(u + x)$ mit Hilfe der Verallgemeinerten Pareto Verteilung G_γ zu bekommen. u ist hier ein geeignet gewählter Schwellwert.

4. Betrachten Sie ein Kreditportfolio bestehend aus 100 Krediten. Sei X_k die Indikatorvariable für die Zahlungsunfähigkeit von Kreditnehmer k, $k = 1, 2, \ldots, 100$, d.h. $X_k = 1$ falls Kreditnehmer k zahlungsunfähig wird und $X_k = 0$, sonst.

   Es wird ein zwei dimensionaler diskreter Zufallsvektor von Risikofaktoren $Z = (Z_1, Z_2)$ berücksichtigt. Es wird weiters angenommen, dass $(X_1, \ldots, X_{100})$ eine Bernoulli Mixture Verteilung besitzt, sodass X bedingt durch Z ein Vektor von unabhängigen Bernoulli verteilten Zufallsvariablen mit

$$Prob(X_i = 1|Z) = \max\{Z_1, Z_2\} \text{ für } i = 1, 2, \ldots, 100\,,$$

$$Prob(X_i = 0|Z) = 1 - \max\{Z_1, Z_2\} \text{ für } i = 1, 2, \ldots, 100$$

   ist. Bestimmen Sie die erwartete Anzahl der zahlungsunfähigen Kreditnehmer für den Fall wo die Verteilungsdichte des Risikovektors folgendermaßen gegeben ist:

   (a) $Z \in \{0.2, 0.05\}^2$, $P(Z = (0.2, 0.2)) = 0.5$, $P(Z = (0.05, 0.05)) = 0.3$, $P(Z = (0.05, 0.2)) = P(Z = (0.2, 0.05)) = 0.1$.

   (b) $Z \in \{0.2, 0.05\}^2$, $P(Z = (0.2, 0.2)) = 0.4$, $P(Z = (0.05, 0.05)) = 0.2$, $P(Z = (0.05, 0.2)) = P(Z = (0.2, 0.05)) = 0.2$.

   (c) $Z \in \{0.1, 0.05\}^2$, $P(Z = (0.1, 0.1)) = 0.5$, $P(Z = (0.05, 0.05)) = 0.3$, $P(Z = (0.05, 0.1)) = P(Z = (0.1, 0.05)) = 0.1$.

   Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (a), (b), (c) untereinander und interpretieren Sie ihre Beobachtungen.