Operations Research WS 2007/2008

4. Übungsblatt

24. Betrachten Sie das multikriterielle Optimierungsproblem (MCOP) $(X, f, \mathbb{R}^2)/\mathrm{id}/(\mathbb{R}^2, <)$, wobei $X = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$, $f = (f_1, f_2)$ mit $f_1(x) = \sqrt{5 - x^2}$, $f_2(x) = x/2$, und $<$ die *komponentenweise Ordnung* auf $\mathbb{R}^2$ ist. Stellen Sie die Mengen X und $Y = f(X)$ der zulassigen Lösungen im Entscheidungsraum bzw. im Zielfunktionsraum dar und bestimmen Sie die Pareto-Menge $X_{Par} \subseteq X$ und die effiziente Menge $Y_{eff} \subseteq Y$.

25. Lösen Sie das Problem aus Beispiel 24 wenn die komponentenweise Ordnung durch die *max Ordnung* bzw. die *lexikographische Ordnung* ersetzt wird:

$$\min_{x \in [-1,1]} \max_{i=1,2} f_i(x)$$

$$lex \min_{x \in [-1,1]} (f_1(x), f_2(x))$$

$$lex \min_{x \in [-1,1]} (f_2(x), f_2(x))$$

Vergleichen Sie für alle drei Fälle die Lösungen des modifizierten Problems mit den Pareto-optimalen Lösungen des ursprünglichen Problems.

26. (Ehrgott et al. 1997)
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: X \to \mathbb{R}$, und $\bar{x} \in X$. Die Menge $L_{\leq}(f(\bar{x}) = \{x \in X: f(x) \leq f(\bar{x})\}$ heißt *Niveau-Menge* von f an der Stelle $\bar{x}$, die Menge $L_{=}(f(\bar{x}) = \{x \in X: f(x) = f(\bar{x})\}$ heißt *Niveau-Kurve* von f an der Stelle $\bar{x}$ und $L_{<}(f(\bar{x}) = \{x \in X: f(x) < f(\bar{x})\}$ heißt *strikte Niveau-Menge* von f an der Stelle $\bar{x}$. Betrachten wir ein MCOP $(X, f, \mathbb{R}^Q)/\mathrm{id}/(\mathbb{R}^Q, <)$. Sei $x^* \in X$ und $y_q := f_q(x^*)$ für $q = 1, 2, \ldots, Q$. Zeigen Sie, dass

    (a) x^* ist strikt Pareto-optimal dann und nur dann wenn $\cap_{q=1}^{Q} L_{\leq}(y_q) = \{x^*\}$, wobei $L_{\leq}(y_q)$ die Niveau-Menge von f_q an der Stelle y_q ist, $q = 1, 2, \ldots, Q$.

    (b) x^* ist Pareto-optimal dann und nur dann wenn $\cap_{q=1}^{Q} L_{\leq}(y_q) = \cap_{q=1}^{Q} L_{=}(y_q)$, wobei $L_{\leq}(y_q)$ wie im Punkt (a) und $L_{=}(y_q)$ die Niveau-Kurve von f_q an der Stelle y_q ist, $q = 1, 2, \ldots, Q$.

    (c) x^* ist schwach Pareto-optimal dann und nur dann wenn $\cap_{q=1}^{Q} L_{<}(y_q) = \emptyset$, wobei $L_{<}(y_q)$ die strikte Niveau-Menge von f_q an der Stelle y_q ist, $q = 1, 2, \ldots, Q$.

27. Sei $[a, b] \in \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, $i = 1, 2, \ldots, Q$. Sei

$$x_i^m = \min\{x \in [a, b]: f_i(x) = \min_{x \in [a,b]} f_i(x)\} \text{ und}$$

$$x_i^M = \max\{x \in [a, b]: f_i(x) = \min_{x \in [a,b]} f_i(x)\}$$

Verwenden Sie das Ergebnis von Beispiel 26 um folgende identische Gleichungen zu zeigen:

$$X_{Par} = \left[\min_{i=1,2,\ldots,Q} x_i^M, \max_{i=1,2,\ldots,Q} x_i^m\right] \bigcup \left[\max_{i=1,2,\ldots,Q} x_i^m, \min_{i=1,2,\ldots,Q} x_i^M\right]$$

$$X_{w-Par} = \left[\min_{i=1,2,\ldots,Q} x_i^m, \max_{i=1,2,\ldots,Q} x_i^M\right]$$

28. Geben Sie jeweils ein Beispiel für die untenstehenden Situationen

    (a) $S(Y) \subset Y_{eff} \subset S_0(Y)$ wobei beide Inklusionen strikt und $S(Y)$, $S_0(Y)$ wie in der Vorlesung definiert sind.

(b) $S(Y) \cup S_0'(Y) = Y_{eff} = S_0(Y)$, wobei

$$S_0'(Y) = \left\{ y' \in Y\colon y' \text{ ist das Element der einelementigen Menge } Opt(\lambda, Y), \lambda \in \mathbb{R}_+^Q \setminus \{0\} \right\}$$

29. Sei $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon \mathrm{x}_1 \geq 0, \mathrm{x}_2 \geq 0, (\mathrm{x}_1 - 1)^3 + \mathrm{x}_2 \leq 0\}$, $f_1(x_1, x_2) = -3x_1 - 2x_2 + 3$, $f_2(x_1, x_2) = -x_1 - 3x_2 + 1$. Stellen Sie X und $Y = f(X)$ graphisch dar für $f = (f_1, f_2)$. Bestimmen Sie die Menge X_{p-Par} der eigentlich Pareto-optimalen Lösungen von $(X, f, \mathbb{R}^2)/\mathrm{id}/(\mathbb{R}^2, <)$.

30. Sei $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon \mathrm{x}_1 \geq 0, \mathrm{x}_2 \geq 0, \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \leq 100, 2\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \leq 150\}$, $f_1(x_1, x_2) = -6x_1 - 4x_2$ und $f_2(x_1, x_2) = -x_1$. Lösen Sie das *ϵ-restringierte Problem* $P_1(\epsilon)$ für $\epsilon = 0$ (siehe die Vorlesung für die Definition des ϵ-restringierten Problems). Überprüfen Sie mit Hilfe der Methode von Benson ob die optimale Lösung x^* von $P_1(0)$ Pareto-optimal für $(X, f, \mathbb{R}^2)/\mathrm{id}/(\mathbb{R}^2, <)$ ist.

31. Lösen Sie das Problem aus Beispiel 30 unter Anwendung der "compromise programming" Methode. Verwenden Sie $w = (1/2, 1/2)$ und bestimmen Sie die Lösung von CP_p^w für $p = 1, 2, \infty$.

32. Sei $Y = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2\colon \mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2 \geq 1, 0 \leq \mathrm{y}_1 \leq 1\}$. Zeigen Sie, dass $\hat{y} = (0, 1) \in Y_{p-eff}$, und, dass es keine $w \in W^0$ mit $\hat{y} \in A(w, \infty, Y)$ existiert, wenn der ideale Punkt y^0 in CP_p^w verwendet wird. (Siehe Vorlesung für die Definition von W^0 und $A(w, \infty, Y)$.)

33. Sei $Y = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2\colon \mathrm{y}_1^2 + \mathrm{y}_2^2 \geq 1\}$. Zeigen Sie die Existenz eines Parameters p, $1 < p < \infty$, sodass folgende Gleichung gilt:

$$Y_{eff} = \cup_{w \in W^0} A(w, p, Y).$$

Verwenden Sie den idealen Punkt y^0 in der Definition von $A(w, p, Y)$ und CP_p^w.