Operations Research WS 2007/2008

1. Übungsblatt - Dynamische Optimierung

1. **Die Hausdorff-Metrik.** Sei $C(\mathbb{R}^r)$ die Klasse aller nichtleeren, kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^r$. Sei $A \in C(\mathbb{R}^r)$ und $a \in \mathbb{R}^r$. Der Abstand $d'(a, A)$ zwischen a und A wird folgendermaßen definiert: $d'(a, A) = \min_{b \in A} \|a - b\|$, wobei $\| \cdot \|$ die L_2-Norm in $\mathbb{R}^r$ ist. (Warum existiert dieses Minimum?) Sei $B \in C(\mathbb{R}^r)$. Der Abstand zwischen A und B wird folgendermaßen definiert:

$$d(A, B) = \max \left\{ \max_{b \in B} d'(b, A), \max_{a \in A} d'(a, B) \right\} .$$

   Zeigen Sie, daß $d(A, B)$ eine Metrik auf $C(\mathbb{R}^r)$ ist.

2. Betrachten Sie das in der Vorlesung eingeführte dynamische Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^{n} g_j(x_{j-1}, u_j) \\ u.d.N.B. & \\ & \begin{array}{rll} x_j = & f_j(x_{j-1}, u_j) & 1 \le j \le n \\ x_0 = & x_a & \\ x_j \in & \Xi_j & 1 \le j \le n \\ u_j \in & \Omega_j(x_{j-1}) & 1 \le j \le n \end{array} \end{array}$$

   wobei $x_j \in \mathbb{R}^m$, $0 \le j \le n$, und $u_j \in \mathbb{R}^r$, $1 \le j \le n$, die Zustands- bzw. Entscheidungsvariablen des betrachteten Systems sind. $x_a \in \mathbb{R}^m$ ist der Anfangszustand, f_j stellt die Abhängigkeit des Systemzustands x_j am Ende der Periode j vom Systemzustand x_{j-1} am Beginn der Periode j (ist gleich dem Systemzustand am Ende der Periode $j - 1$) und von den am Beginn der Periode j getroffenen Entscheidungen u_j dar. Ξ_j ist der (nichtleere) Zustandsbereich am Ende der Periode j und $\Omega(x_{j-1})$ ist der von x_{j-1} abhängige (nichtleere) Entscheidungsbereich am Beginn der Periode j.

   Beachten Sie, dass in dieser Problemstellung der Zustand am Ende der Periode j nur von den Entscheidungsvariablen u_j und dem Zustand x_{j-1} am Ende der vorherigen Periode abhängt. Daher wird dieses Problem auch dynamisches Optimierungsproblem *erster Ordnung* genannt.

   Betrachten Sie nun ein ähnliches dynamisches Optimierungsproblem in dem der Zustand x_j am Ende einer Periode j auch vom Zustand x_{j-2} am Ende der Periode $j - 2$ abhängt (ein dynamisches Optimierungsproblem *zweiter Ordnung*). Zeigen Sie, dass ein dynamisches Optimierungsproblem zweiter Ordnung mit Hilfe von „fiktiven“ Zustandsvariablen als dynamisches Optimierungsproblem erster Ordnung formuliert werden kann.

3. **Das Rucksackproblem.** Ein Wanderer kann in seinen Rucksack verschiedene Ausrüstungsgegenstände einpacken, wobei unterschiedliche Gegenstände unterschiedliche Gewichte und Werte haben (ein größerer Wert entspricht einem größeren Nutzen). Sei n die Anzahl der zur Verfügung stehenden Ausrüstungsgegenstände. Seien c_i und a_i der Wert bzw. das Gewicht des Gegenstands i, $1 \le i \le n$. Gesucht ist eine optimale Rucksackfüllung, d.h. eine Füllung mit maximalem Gesamtwert, wobei ein vorgegebenes Gesamtgewicht des Rucksacks nicht überschritten werden darf. Falls für jeden Ausrüstungsgegenstand nur ein Exemplar in den Rucksack eingepackt werden darf, dann spricht man von einem *(binären) Rucksackproblem.* Falls für jeden Ausrüstungsgegenstand mehrere Exemplare in den Rucksack eingepackt werden darf, dann spricht man von einem *ganzzahligen Rucksackproblem.*

   Formulieren Sie das binäre bzw. das ganzzahlige Rucksackproblem als dynamisches Optimierungsproblem. Verwenden Sie die Bellmansche Funktionalgleichung und das Bellmansche Optimalitätsprinzip um das binäre bzw. das ganzzahlige Rucksackproblem mit folgenden Inputparametern zu lösen:

Gegenstand i	1	2	3	4
Wert c_i	8	6	10	12
Gewicht a_i	2	2	4	6
erlaubtes Gesamtgewicht		11		

4. Angenommen, der Bedarf r_i, $1 \leq i \leq 5$, eines Bauteiles ist für die nächsten fünf Monate folgendermaßen gegeben: $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = 2$, $r_4 = 2$ und $r_5 = 4$. Die Bauteile müßen bestellt werden; die Rüstkosten betragen 5 Euro, die Produktionskosten 1 Euro pro Stück und die Lagerkosten 0,30 Euro pro Stück. Ermitteln Sie mit Hilfe eines dynamischen Optimierungsverfahren den kostenminimalen Bestellungsplan, der den monatlichen Bedarf erfüllt.

5. Ein Taxi-Unternehmen verbraucht pro Monat Benzin in einer Menge von 8500 Gallonen. (Der Verbrauch erfolgt kontinuierlich mit konstanter Verbrauchsrate.) Die Benzinkosten betragen \$ 1,10 pro Gallone, mit fixen Bezugskosten von \$ 1000. Die Lagerkosten belaufen sich auf 1 Cent pro Gallone pro Monat. Bestimmen Sie wie oft eine Bestellung aufgegeben und welche Menge bestellt werden sollte, wenn keine Fehlmengen erlaubt sind und die Gesamtkosten minimiert werden sollten.

6. Betrachten Sie den Graph G aus Abbildung 1. Es wird angenommen, dass jede Kante (i, j) in beiden Richtungen (von i nach j und von j nach i) durchlaufen werden kann und die Kantenlängen jeweils für beide Richtungen gelten. Bestimmen Sie mit Hilfe der dynamischen Optimierung einen kürzesten Weg von i nach 5 für jedes i, $i = 1, 2, 3, 4$, in G.

7. Die Verkaufschefin eines Verlages für akademische Lehrbücher hat 6 Verkäufer im Außendienst beschäftigt, die drei verschiedene Regionen des Landes betreuen sollen. Sie hat beschlossen, dass jede Region mindestens einen Verkäufer zugewiesen bekommt, und dass jeder einzelne Verkäufer nur eine Region betreuen soll. Sie will nun bestimmen, wieviele Verkäufer den jeweiligen Regionen zugeteilt werden sollen, damit der Umsatz maximiert wird. Tabelle 1 gibt für jede Region den geschätzen Zuwachs des Umsatzes an (in geigneten Einheiten), wenn eine unterschiedliche Anzahl von Verkäufern dort tätig ist. Lösen Sie dieses Problem mit Hilfe der dynamischen Optimierung.

Anzahl der Verkäufer	Region 1	Region 2	Region 3
1	4	3	5
2	6	6	7
3	9	8	10
4	11	10	12

Tabelle 1: Daten für Beispiel 7

8. Damit das Weltraumprojekt eines Staates erfolgreich ist und die Menschheit sicher zum Mars fliegen kann, muß ein bestimmtes technisches Problem gelöst werden. Drei Forschungsteams sind derzeit damit beschäftigt, drei verschiedene Lösungsmethoden für dieses Problem zu untersuchen. Unter den gegenwärtigen Umständen schätzt man, dass die jeweiligen Teams - im weiteren Verlauf mit 1, 2 und 3 bezeichnet - mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.4, 0.6 bzw. 0.8 ohne Erfolg bleiben. Da das Ziel darin besteht, die Wahrscheinlichkeit für ein Scheitern von allen drei Teams zu minimieren, wurden zwei weitere Spitzenwissenschaftler für das Projekt eingestellt. Tabelle 2 gibt die geschätzte Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die jeweiligen Teams erfolglos sind, wenn die Teams um 0, 1 oder 2 Wissenschaftler erweitert werden. Das Problem besteht darin, zu bestimmen, wie die zwei zusätzlichen Wissenschaftler eingesetzt werden sollen, um die Wahrscheinlichkeit eines Fehlschlages aller drei Teams zu minimieren. Lösen Sie dieses Problem mit Hilfe der dynamischen Optimierung.

9. Die Arbeitsbelastung in einem örtlichen Geschäftsbetrieb ist abhängig von großen saisonalen Schwankungen. Da es schwierig ist die Arbeiter zu entlassen und da die Kosten für die Ausbildung hoch sind, widerstrebt es dem Geschäftsführer, Arbeiter in den ruhigen Jahreszeiten zu entlassen. Es widerstrebt

Anzahl der neuen Wissenschaftler	Wahrscheinlichkeit für einen Fehlschlag		
	Team		
	1	2	3
0	0.4	0.6	0.8
1	0.2	0.4	0.5
2	0.15	0.2	0.3

Tabelle 2: Daten für Beispiel 8

ihm gleichermaßen, die Lohnsumme von den Spitzenzeiten beizubehalten, wenn es nicht notwendig ist. Er ist grundsätzlich dagegen, regelmäßig Überstunden leisten zu lassen. Da die gesamte Arbeit auftragsabhängig durchgeführt wird, ist es nicht möglich in den ruhigen Zeiten Läger zu bilden. Der Geschäftsführer steht deshalb in dem Dilemma, welche Politik er bei der Festlegung der Beschäftigungsniveaus einschlagen soll. Es werden folgende Schätzungen des Bedarfs an Arbeitskräften in den vier Jahreszeiten für die nächste Zeit angegeben:

Jahreszeit	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling
Bedarf in Personen	255	270	240	200	255

Die Beschäftigung darf nie unter dieses Niveau sinken. Jede Beschäftigung über diesem Niveau führt zu überflüßigen Kosten von ca. 2000 Euro pro Person und Jahreszeit. Es wird geschätzt, dass die Kosten der Ein- und Ausstellung so aussehen, dass sich die gesamten Kosten einer Änderung des Beschäftigungsniveaus von einer Saison zur nächsten aus der quadrierten Differenz zwischen den Beschäftigungsniveaus multipliziert mit 130 Euro ergeben. Da auch Teilzeitkräfte eingestellt werden können, können auch nichtganzzahlige Beschäftigungsniveaus vorkommen und auch die Kostendaten können sich als gebrochene Zahlen ergeben.

Der Geschäftsführer muß bestimmen, welche Beschäftigungsniveaus in jeder Saison einzuhalten sind, damit die gesamten überflüßigen Kosten minimiert werden. Lösen Sie dieses Problem mit Hilfe der dynamischen Optimierung.

10. Zu betrachten ist das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{ll} \max & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{udNB} & \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Lösen Sie dieses Problem mit Hilfe der dynamischen Optimierung.

11. Zu betrachten ist das folgende ganzzahlige nichtlineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \max & z = x_1 x_2^2 x_3^3 \\ \text{udNB} & \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_1 \geq 1,\, x_2 \geq 1,\, x_3 \geq 1 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \text{ ganzzahlig} \end{array}$$

Lösen Sie dieses Problem mit Hilfe der dynamischen Optimierung.

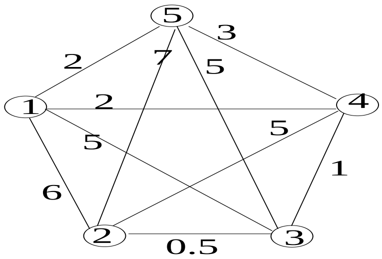

Abbildung 1