Operations Research WS 2007/2008

Bellman'sche Funktionalgleichungsverfahren zur Lösung von dynamischen Optimierungsproblemen - Version A

Algorithm *Bellman'sche Funktionalgleichung - Version A*
Input:
1. Kostenfunktion g_j,
2. Funktionen f_j,
3. Anfangszustand x_a,
4. Intervallgrenzen ξ^- und ξ^+ des Zustandbereiches,
5. Intervallgrenzen $\omega^-(.)$ und $\omega^+(.)$ des Steuerbereiches,
6. Diskretisierungsparameter p und q_ρ, $\rho = 1, 2, \ldots, p$.

Output:
7. Eine optimale Politik $(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*)$,
8. die dazugehörige Zustandsfolge $(x_0^*, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$,
9. die minimalen Kosten G^*,
10. eine obere Grenze für den aufgetreten Rechenfehler $|G^* - \hat{G}|$.

11. **Vorbereitungsschritt**
12. $\Delta\xi = \frac{\xi^+ - \xi^-}{p}$
13. Für $\rho = 1, 2, \ldots, p$ setze $\Delta\omega_\rho := \frac{\omega^+(\xi^- + \rho\Delta\xi) - \omega^-(\xi^- + \rho\Delta\xi)}{q_\rho}$
14. $\alpha = 0; \beta = 1$

15. **Rückwärtsrechnung**
16. Fall j=n:
17. B=FALSE
18. **for** $\rho \leftarrow 0$ **to** p **do**
19. $\quad x := \xi^- + \rho\Delta\xi$, $\phi_{\alpha,\rho} := \infty$
20. $\quad$ **for** $\sigma \leftarrow 0$ **to** q_ρ **do**
21. $\qquad u := \omega^-(x) + \sigma\Delta\omega_\rho$
22. $\qquad$ Falls $g_n(x,u) < \phi_{\alpha,\rho}$ und $f_n(x,u) \geq \xi^-$ und $f_n(x,u) \leq \xi^+$, setze $\phi_{\alpha,\rho} := g_n(x,u)$ und $\eta_{n,\rho} := u$
23. $\quad$ Falls $\phi_{\alpha,\rho} < \infty$, setze $B := TRUE$.
24. Falls $B = FALSE$ gehe zu (55), sonst zu (25).

25. Fall $j < n$:
26. **for** $n \leftarrow n-1$ **to** 1 **do**
27. $\quad B := FALSE$, $\phi_{\alpha,p+1} := 0$
28. $\quad$ **for** $\rho \leftarrow 0$ **to** p **do**
29. $\qquad x := \xi^- + \rho\Delta\xi$, $\phi_{\beta,\rho} := \infty$
30. $\qquad$ **for** $\sigma \leftarrow 0$ **to** q_ρ **do**
31. $\qquad\quad u := \omega^-(x) + \sigma\Delta\omega_\rho$
32. $\qquad\quad \tilde{x} := f_j(x,u)$
33. $\qquad\quad$ **if** $\tilde{x} \geq \xi^-$ und $\tilde{x} \leq \xi^+$ **then**
34. $\qquad\qquad \tau := \frac{\tilde{x} - \xi^-}{\delta\xi}$, $\tau' := [\tau]$, $\tau'' := \tau - \tau'$
35. $\qquad\qquad \tilde{\phi} := \phi_{\alpha,\tau'} + \tau''(\phi_{\alpha,\tau'+1} - \phi_{\alpha,\tau'})$
36. $\qquad\qquad$ Falls $g_j(x,u) + \tilde{\phi} < \phi_{\beta,\rho}$, setze $\phi_{\beta,\rho} := g_j(x,u) + \tilde{\phi}$ und $\eta_{j,\rho} := u$
37. $\qquad$ Falls $\phi_{\beta,\rho} < \infty$, setze $B := TRUE$

38. $\quad s := \alpha$, $\alpha := \beta$, $\beta := s$
39. $\quad$ Falls $B = FALSE$ gehe zu (55).
40. $\quad$ Falls $j = 1$, setze $p := 0$ und $\xi^- := x_a$.
41. Gehe zu (42).

42. Vorwärtsrechnung:
43. $x_0^* := x_a$.
44. $u_1^* := \eta_{1,0}$.
45. $x_1^* := f_1(x_0, u_1)$.
46. **for** $j \leftarrow 2$ **to** n **do**
47. $\quad \tau := \frac{x_{j-1}^* - \xi^-}{\Delta\xi}$, $\tau' := [\tau]$, $\tau'' := \tau - \tau'$, $\eta_{j,p+1} := 0$
48. $\quad u_j^* := \eta_{j,\tau'} + \tau''(\eta_{j,\tau'+1} - \eta_{j,\tau'})$
49. $\quad x_j^* := f_j(x_{j-1}^*, u_j^*)$.
50. Gehe zu (51)

51. $\hat{G} := \phi_{a,0}, G^* := 0$.
52. **for** $j \leftarrow 1$ **to** n **do**
53. $\quad G^* := G^* + g_j(x_{j-1}^*, u_j^*)$
54. Stop. $(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*)$ stellt eine optimale Politik dar. $(x_0^*, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ stellt die zugehörige Zustandsfolge und G^* die minimalen Kosten dar. $|G^* - \hat{G}|$ ist ein Maß für die aufgetretenen Rechenfehler.

55. Stop. Die gewählte Diskretisierung des Zustands- und Steuerbereiches liefert keine zulässige Lösung. Die Diskretisierung ist zu verfeinern.